


UNIVERSITÉ PARIS 1  
PANTHÉON SORBONNE  
OMNIBUS SAPIENTIA UNICUIQUE EXCELLENTIA

Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,

## Institut de démographie



Cours d'analyse démographique et modèles de populations niveau : **Master de démographie** par Alexandre Avdeev,

**Chapitre 10**

### Modèles de la mortalité

**année 2018-2020**

- Ajustement avec une fonction analytique: l'idée de Gompertz et son développement par Makeham, Perks, Helligmen et Pollard ;
- Modèle de la mortalité infantile de Bougeois-Pichat
- Présentation tabulaire ou les tables type de mortalité :
  - Nations Unies,
  - A. Coale & P. Demeni,
  - S. Ledermann ;
- [Modèle relationnelle de mortalité de W.Brasse](#)

**Lecture :**

Nations Unies, *Manuel X 'Techniques indirectes d'estimation démographique'* Nations Unies, 1984, ST/ESA/SER.A/81 (disponible sur le site WEB des NU)

Kennet Hill, « Méthodes d'estimation indirecte », dans G.Cazelli, J.Vallin et G.Wunsch (dir.) *Démographie: Analyse et Synthèse*, vol. III, *Observation, méthodes auxiliaires, enseignement et recherche*. Paris, INED, 2006, p.243-265

Josianne Duchène, « Les tables-types de mortalité », *ibid*, 2006, p.267-286

Rolland Pressat, *Éléments de démographie mathématique*. Edition de l'AIDELF, Paris, 1995, p.1-48

H. Leridon et L. Toulemon, *Démographie. – Approche statistique et dynamique des populations*. Economica, Paris, 1997, p.211-232

Samuel H. Preston, Patrick Heuveline and Michel Guillot – *Demography. Measuring and Modeling Population Processes*. Blackwell Publishing, 2000, p.191-201

Jaques Vallin, Graziella Cazelli – “La table de mortalité d'une génération”, dans G.Cazelli, J.Vallin et G.Wunsch (dir.) *Démographie: Analyse et Synthèse*, vol. I, *La dynamique des populations*. Paris, INED, 2001, p.165-212

**Logiciels:** Mortpak Lite v.4.3 <https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/mortality/mortpak.asp>

1

### La simplification et la réduction du nombre des hypothèses dans les projections (rappel) :

**Problèmes:**

- La désagrégation de la population (subdivision en groupes par âge et par sexe dans lesquels la mortalité, la fécondité et la migration sont plus ou moins *homogènes*) permet de d'obtenir une représentation précise d'un phénomène étudié, mais **la multiplication des séries de nombres est encombrante**.
- L'application de la méthode des composantes demande des taux de fécondité, de mortalité et de migration par âge et par sexe pour chaque intervalle de la période de projection, par conséquent **des hypothèses se multiplient**.

**Solution plausible – réduction de l'information d'entrée d'un modèle :**

- Construire un modèle et d'associer, ou de mettre en correspondance, les distributions des taux par âge avec le nombre réduit (un, deux ou trois) des paramètres.
- Le modèle représente un standard pour les distributions des taux par âge (risque), basé sur l'expérience de plusieurs populations pour lesquelles la qualité des données est bonne.

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

2

## Mortalité de point de vue de démographie

### Survivants et décédés à l'âge x

exemple : France 2001-2002

### Quotients de mortalité par âge et par sexe

sur papier semi logarithmique

### Tables de mortalité (rappel)

- Indicateurs principaux  
( $S_x; d_x; {}_nq_x; {}_np_x; {}_nm_x; {}_nL_x; T_x; e_x; D_x$ )
- Méthodes de constructions  
(à partir des taux par âge, des quotients etc.)
- Relations entre les indicateurs d'une table de mortalité

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 3

3

## Relations entre les indicateurs de la table de mortalité (rappel)

$${}_nq_x = 1 - e^{-n \cdot m_x} \quad {}_nq_x = \frac{n \cdot m_x}{1 + (n - a_x) \cdot m_x} \quad \text{si } a = n/2 \rightarrow \quad {}_nq_x = \frac{2n \cdot m_x}{2 + n \cdot m_x}$$


---


$${}_nq_x = 1 - {}_np_x; \quad {}_nq_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{S_x} = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x}; \quad S_{x+n} = S_x \cdot (1 - {}_nq_x) = S_x \cdot {}_np_x; \quad S_x = \prod_{i=0}^x p_i$$


---


$$d_x = S_x - S_{x+1}; \quad \sum_{x=0}^{\omega} d_x = (S_0 - S_1) + (S_1 - S_2) + \dots + (S_{\omega-1} - S_{\omega}) = S_0; \quad \text{Si } S_0 = 1; \quad \therefore \sum_{x=0}^{\omega} d_x = 1;$$


---


$$D_x = \sum_{x=0}^x d_x; \quad S_x + D_x = S_0 = \sum_{x=0}^{\omega} d_x = D_{\omega}; \quad {}_nL_x = n \cdot \frac{(S_x + S_{x+n})}{2}; \quad {}_nL_x = n \cdot \frac{S_x - S_{x+n}}{\ln S_x - \ln S_{x+n}}; \quad T_x = \sum_{x=0}^{\omega} {}_nL_x$$


---


$$\bar{e} = \sum_{x=0}^{\omega} (x + \alpha_x) \cdot d_x = e_0 \quad e_0 = \sum_{x=0}^{\omega-1} L_x \quad e_0 = a + \sum_{x=0}^{\omega-1} x \cdot d_x \quad e_x = \frac{T_x}{S_x}$$

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 4

4

### Approche mathématique de la mortalité

**1. Correspondance des indicateurs (discrets) de table de mortalité classique aux fonctions (continues)**

Indicateurs de table :	Fonctions correspondantes :
$S_x$ – nombre de survivants à l'âge exact $x$	$\rightarrow S(x)$ – fonction survie := $l(x)$
${}_1d_x$ – nombre de décès entre l'âge $x$ et $x+n$	$\rightarrow d(x)$ – fonction décès
${}_1q_x$ – quotient annuel de mortalité à l'âge $x$	$\rightarrow q(x)$ – fonction quotient := $\mu(x)$ $\mu(x)$ – force de mortalité

**2. Passage des suites des indicateurs de la table de mortalité à des fonctions**

$S(x)$  – fonction survie = on peut imaginer une interpolation à partir de l'ensemble de points de la suite  $\{x, S_x\}$

$d(x)$  – fonction décès  $\rightarrow$  difficile à partir de la suite  $d(x, x+\Delta x)$ , correspondant à une suite  $\Delta x \rightarrow 0$ , puisque la valeur limite est nulle et il ne pas possible de dénombrer des décès à une date (moment) ponctuel la solution est de passer à **la densité de décès** sur une intervalle infinitésimal  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x+\Delta x)}{\Delta x}$

Alors  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x) - S(x+\Delta x)}{\Delta x} = -S'(x) = d(x)$  et le nombre de décès sur un intervalle infinitésimal =  $d(x)dx$

$q(x)$  – fonction quotient (force de mortalité) se fabrique aussi à partir de  $S(x)$  avec les même précautions que pour  $d(x)$

$q(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x, x+\Delta x)}{\Delta x \cdot S(x)} = \frac{d(x)}{S(x)} = \frac{S'(x)}{S(x)} \rightarrow q(x) = -[\ln S(x)]' \rightarrow S(x) = e^{-\int_0^x \mu(x) dx}$  juste pour écriture  $q(x) := \mu(x)$

voir le cours d'analyse chapitre 5 diapositive 17

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 5

5

### Relations entre les indices de table et les fonctions continues associées

$x_m$  et  $x_M$  – deux points d'inflexions de la fonction survie, qui correspondent au minimum et au maximum de densité des décès.

$S(x)$  est donc concave sur les intervalles  $(0, x_m)$  et  $(x_M, \omega) := S''(x) \geq 0$ , si  $x \in \left\{ \begin{matrix} (0, x_m) \\ (x_M, \omega) \end{matrix} \right.$

Par conséquent sur ces intervalle  $d(x)$  est décroissante, donc  $d(x) > d(x+\theta) = d_x$  et  $\mu(x) > q_x$

En revanche  $S(x)$  est convexe sur l'intervalle  $(x_m, x_M) := S''(x) \leq 0$ , si  $x \in (x_m, x_M)$

alors  $d(x) < d(x+\theta) = d_x$  et  $\mu(x) < q_x$

Par définition  $\mu(x) = \frac{S'(x)}{S(x)} \rightarrow \ln S(x) = -\int \mu(x) dx + \ln C \rightarrow$

$S(x) = C \cdot e^{-\int \mu(x) dx + \ln C} = C \cdot e^{-F(x)}$  Ln C – une constante arbitraire  
F(x) – une fonction de x

Sachant que  ${}_1q_n = 1 - \frac{S_{x+1}}{S_x}$  on peut écrire  ${}_1q_n = 1 - \frac{S_0 \cdot e^{-\int_0^{x+1} \mu(\xi) d\xi}}{S_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu(\xi) d\xi}} \rightarrow$

${}_1q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu(\xi) d\xi} = 1 - e^{-\mu}$  ou simplement  $e^{-\mu(x)} = {}_1p_x = 1 - {}_1q_x$

Ce qui donne une possibilité pour  $\mu$  d'être  $> 1$  sous la condition que  $\ln(1 - q_x) > 1$

Cette condition est remplie dès que  $1 - q_x < e^{-1}$ , :=  ${}_1q_x > 0,632$

D'après les tables de Kannisto-Tatcher une telle situation a lieu après l'âge de 110 ans voir <http://www.demogr.mpg.de/databases/ktadb/>

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 6

6

### Une hypothèse : le risque est une fonction paramétrique de l'âge

#### La formule de Gompertz-Makeham

**L'idée de Gompertz, 1825:**  
 résistance individuelle à la mort  $\frac{1}{\mu(x)}$  augmente avec l'âge à taux constant  $k \rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = [\ln \mu(x)]' = k$

**Quotients de mortalité (probabilité de mourir)**  
France, 2000-2002

$\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x}$

à partir de l'âge ~30-40 ans le logarithme du taux de mortalité est une fonction linéaire de l'âge

$\ln[\mu(x)] = \ln \alpha + \beta \cdot x$

$\alpha$  – est le paramètre de niveau (de l'espérance de vie « naturelle »)

$\beta$  – est le paramètre la vitesse de extinction

**Makeham, 1860:**  $\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x} + \gamma$

où  $\gamma$  – paramètre qui détermine l'influence des facteurs de la mortalité « exogène » (accidents, infection etc.)

$\ln S_{x+1} = a + b \cdot c^{-x}$

GOMPERTZ Benjamin, 1825. – On the nature of the function expressive of the law of the human mortality and on a new mode of determining the value of life contingencies, Philosophical Transactions of the Royal Statistical Society, vol. 27, n° 2, p. 513- 583.  
 MAKEHAM William M., 1860. – On the law of mortality and the construction of annuity tables, The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries, vol. 8, p. 301-310.  
 MAKEHAM William M., 1867. – On the law of mortality, Journal of the Institute of the Actuaries, n° 13, p. 325-67.

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

7

### Application de la formule de Gompertz pour « fermer » une table de mortalité

$\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x} \Rightarrow S(x) = C \cdot a^{b^x}$  On peut estimer les paramètres  $C$ ,  $a$  et  $b$  à partir de trois valeurs d'une table de mortalité

$$b = \frac{\left[ \frac{\ln \frac{S(x+2n)}{S(x+n)}}{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}} \right]^{\frac{1}{n}}}{\frac{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}}{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}}}; \quad a = \exp \left( \frac{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}}{b^x \cdot (b^n - 1)} \right); \quad C = S(x) \cdot \exp(-b^x \cdot \ln a)$$

**Exemple: France, table de mortalité 2000-2002**

$$b = \frac{\left[ \frac{\ln \frac{S(85)}{S(80)}}{\ln \frac{S(80)}{S(75)}} \right]^{\frac{1}{5}}}{\frac{\ln \frac{S(80)}{S(75)}}{\ln \frac{S(80)}{S(75)}}} = 0,999886;$$

$$a = \exp \left( \frac{\ln \frac{S(80)}{S(75)}}{b^{75} \cdot (b^5 - 1)} \right) = 1,113403$$

x	S(x)	$\hat{S}(x)$
75	61250	<b>61250</b>
80	47391	<b>47391</b>
85	30554	<b>30554</b>
90		<b>14418</b>
95		<b>3988</b>
100		<b>442</b>
105		<b>10</b>
110		<b>0</b>

$C = S(75) \cdot \exp(-b^{75} \cdot \ln a) = 87860,06$

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

8

### Problème d'estimation de la mortalité aux âges très élevés

On observe qu'aux âges très élevés la croissance de la force de mortalité ralentit avec l'augmentation de l'âge

Perks W. (1932) – "On Some Experiments in the Graduation of Mortality Statistics" *Journal of the Institute of Actuaries*, 109, p.225-240

Vaupel J.W., K.S.Manton and E.Sallard (1979)– "The impact of heterogeneity in Individual Frailty on the Dynamic of Mortality" *Demography*, Vol.16, no.3, p.439-454

Horiuchi, Shiro and A.J.Coale (1990) – "Age patterns of Mortality for Older Women: An Analysis Using the Age-specific Rate of Mortality Change with Age" *Mathematical Population Studies*. Vol.2, no.4, p.245-267

**Solution de Perks: recours à un modèle logistique :**

soit  $\mu(x)$  – la force de mortalité à l'âge exact  $x$  telle que  $\mu(x) = \frac{\beta \cdot \gamma^x}{1 + \beta \cdot \gamma^x}$   
(son estimateur est le taux de mortalité)

et son complément à un  $1 - \mu(x) = \frac{1}{1 + \beta \cdot \gamma^x}$  d'où

$\frac{\mu(x)}{1 - \mu(x)} = \beta \cdot \gamma^x \Rightarrow$  donc logit de  $\mu(x)$ ;  $\ln \left[ \frac{\mu(x)}{1 - \mu(x)} \right] = a \cdot x$  est une fonction linéaire de l'âge

logit de  $\mu(x)$   $\rightarrow$  ln [ μ(x) / (1 - μ(x)) ]

### Mortalité aux âge très jeunes

Aux âges précoces la diminution de la mortalité avec l'augmentation de l'âge est très rapide et non linéaire

Bourgeois-Pichat J. (1946) – « De la mesure de la mortalité infantile » *Population*, Vol.1, N°1, p.53-68

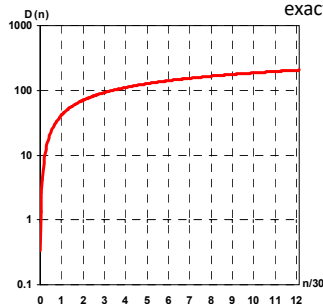
Bourgeois-Pichat J. (1951) – « La mesure de la mortalité infantile. II, Les causes de décès » *Population*, Vol.6, N°3, p.459-480

Lantoin C., et R.Pressat (1984) – « Nouveaux aspects de la mortalité infantile » *Population*, Vol.39, N°2, p.253-264

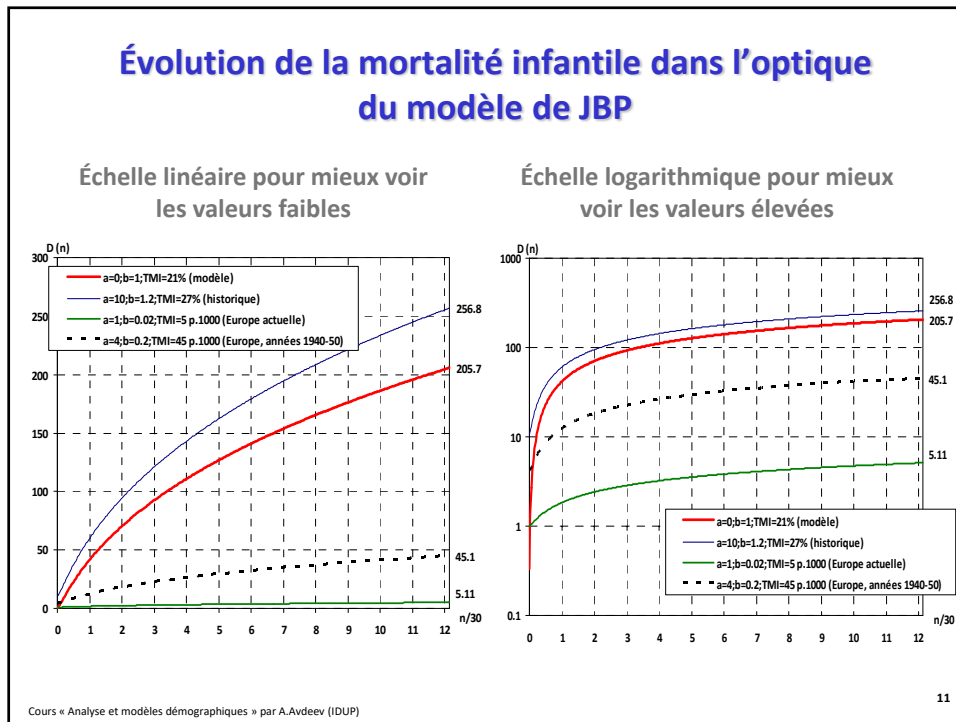
**Solution de Bourgeois-Pichat :** décomposition de la mortalité infantile en mortalité « endogène » et celle « exogène ». Soit  $D(n)$  est la probabilité de mourir avant l'âge exact  $n+1$ , telle que

$$D(n) = a + b \cdot [\ln(n+1)]^3$$

- a – mortalité exogène (accidents, infections etc.) : supposée d'être indépendante de l'âge (une constante)
- b – paramètre de la mortalité « endogène », celle-ci est dépendante de l'âge en jours
- n – l'âge en jours (on ajoute 1 pour transformer l'âge révolu à l'âge atteint dans la journée.



En fait, l'expression  $[\ln(n+1)]^3$  représente un modèle de la « mortalité infantile naturelle » et la variation du paramètre  $a$  joue le rôle majeur dans la variation du niveau historique de la mortalité infantile.



11

### Possibilité d'ajustement de la fonction $\mu(x)$ « force de la mortalité » ou fonction quotient par morceau

Exemple du Roland Pressat (1995), p.4-5

Soit sur un intervalle la courbe de survie pourrait être approximée par une parabole quadratique

$$S(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 + f \cdot x^4$$

à partir de cet ajustement il est possible d'estimer les valeurs de la fonction de décès (densité) et de celle de quotient (force de mortalité) :

$$d(x) = -S'(x); \quad \mu(x) \equiv q(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)}$$

prenons 5 points d'âge ( $x$ ) notés respectivement -2; -1; 0; +1; +2, alors pour l'âge 0 la densité de décès  $d(0)$  sera égale à  $-S'(0) = -b$

On peut estimer le paramètre  $b$ , à partir du système d'équations:

$$\begin{cases} S(-1) = a - b + c - d + f \\ S(+1) = a + b + c + d + f \\ S(-2) = a - 2b + 4c - 8d + 16f \\ S(+2) = a + 2b + 4c + 8d + 16f \end{cases}$$

Qui nous donne  $-b = d(x) = \frac{8 \cdot [S(x-1) - S(x+1)] - [S(x-2) - S(x+2)]}{12}$

et  $q(x) = \frac{d(x)}{S(x)} = \frac{8 \cdot [S(x-1) - S(x+1)] - [S(x-2) - S(x+2)]}{12 \cdot S(x)}$

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 12

12

## Modèle paramétrique généralisé de la mortalité

Heligmen L. and H.Pollard (1980) – "The Age Patterns of Mortality" *Journal of the Institute of Actuaries*.  
Vol.107, Part 1, no 434, p.49-80

**Solution de Heligmen and Pollard:** modèle représente la somme de trois courbes et comporte huit paramètres

**La première composante diminue rapidement.**

**La deuxième composante** gère la surmortalité accidentelle et maternelle

**La troisième composante** a la même nature que la formule logistique pour les âges élevés

$$\frac{{}_1q_x}{{}_1p_x} = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + G \cdot H^x$$

Il est aussi possible de décrire la mortalité ainsi, mais dans ce cas  $q_x$  peut théoriquement, mais jamais en pratique dépasser 1

$${}_1q_x = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + \frac{G \cdot H^x}{1 + G \cdot H^x}$$

**Mortalité croissant selon la loi de Gompertz-Perks**

**Surmortalité aux âges moyens**

**Mortalité infantile et juvénile**  
A – niveau de la MI;  
B – paramètre de position  
C – paramètre de vitesse

Figure 1. The graduated  $q_x$  curve and its three components: Australian national mortality, 1970-72 (males).

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 13

13

## Paramètres du modèle de Helligmen-Pollard

(estimation → Mortpak for Windows, procédure UNARB)

$$\frac{{}_1q_x}{{}_1p_x} = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + G \cdot H^x$$

**La première composante diminue rapidement.**

**La deuxième composante** gère la surmortalité accidentelle et maternelle

**La troisième composante** a la même nature que la formule logistique pour les âges élevés (vieillesse)

**A – niveau de la MI;  
B – paramètre de position  
C – paramètre de vitesse**

**F – paramètre de position  
E – paramètre de l'extension (largeur)  
D – paramètre de niveau (hauteur)**

**G – niveau de base de la mortalité  
H – la vitesse de croissance**

OU

$H^{x-x_0}$  ←  $x_0$  – âge, où  $q_x/p_x=1$  → ( $q_x=0.5$ )

$q_x/p_x = G H^x$

$q_x = G H^x / (1 + G H^x)$

$q(x) = G H^{(x-x_0)}$

Figure 1. The graduated  $q_x$  curve and its three components: Australian national mortality, 1970-72 (males).

Lecture : A.Rogers and K.Gard « Application of the Helligmen-Pollard model mortality schedule » // *Population Bulletin of the United Nations*, No. 30 -1991, p.79-105

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 14

14

## II. Modèles tabulaires: tables types

Lecture :

Josianne Duchêne « Les tables types de mortalité » Dans: G.Caselli, J.Vallin et G.Wunsch *Démographie: Analyse et Synthèse*, vol. VIII *Observation, méthodes auxiliaires, enseignement et recherche*, INED, Paris, 2006 p.267- 290

UN, Introduction aux tables-types de mortalité

### 1. Tables types de mortalité des Nations Unies, 1955: modèle avec un seul paramètre

United Nations (1955) – *Age and Sex Patterns of Mortality: Model Life Tables for Underdeveloped Countries*. NY

**Données de base:** 158 tables de mortalité des pays en développement (mauvaise qualité des données)

**Principe de construction:** équations récurrentes ou les calculs en chaîne  $\rightarrow {}_5q_x$  (probabilité de mourir entre l'âge  $x$  et  $x+5$ ) est la fonction quadratique de  ${}_5q_{x-5}$  à l'exception de  ${}_1q_0$  et  ${}_4q_5$  pour lesquelles les amplitude d'intervalles = 1 et 4)

$${}_5q_x = A + B \cdot {}_5q_{x-5} + C \cdot {}_5q_{x-5}^2$$

+ **Avantage:** simplification des hypothèse, modèle avec une seule entrée (mortalité infantile:  ${}_1q_0 \rightarrow {}_4q_5 \rightarrow {}_5q_{10}$  etc.)

– **Désavantage:** biais systématique (erreur moyenne  $\neq 0$ ) ou la reproduction de l'erreur initial à cause des calculs en chaîne (surestimation de l'espérance de vie de  $\approx 2$  ans en moyen . (Cf Gabriel K.R., Ronen I. – Estimates of mortality from infant mortality rates. *Population Studies*, 1958, vol.12, no. 2, p.164-169 : ont proposé de passer de  ${}_1q_0$  à  ${}_4q_1$  par une relation quadratique et d'estimer les quotients de mortalité comme une fonction linéaire de  ${}_1q_0$  :  ${}_nq_5 = A+B \cdot {}_1q_0$ )

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

15

15

### 2. Tables types de mortalité régionales de Coale–Demeny, 1966 et 1983: modèle à deux entrées

Coale A.J. and P.Demeny (1966) – *Regional Model Life Tables and Stable Population*. Princeton. Princeton University Press

Coale A.J. and P.Demeny with B.Vaughan (1983) – *Regional Model Life Tables and Stable Population*. NY, Academic Press

**Données de base:** initialement 326 tables de décès par sexe et la population au recensement par âge et par sexe, 192 tables de mortalité sélectionnées d'après étude visuelle de la dispersion des  ${}_5q_x$

**Principe de construction:** classification des tables selon la similarité des structures des taux de mortalité par âge (plus exactement – selon la similarité de la densité de probabilité de mourir).

1e étape: pour chaque âge tous les valeurs de  ${}_nq_x$  ont été ordonnées

2e étape: pour chaque rang de  ${}_nq_x$  les tables de mortalité type ont été préliminairement construites.

3e étape: chaque table initiale a été comparée avec une table type préliminaire ayant à peu près le même niveau de mortalité générale ( $e_0$ ) et les tables défailtantes ont été rejetées

4e étape: 192 tables sélectionnées ont été réparties en 4 groupes selon la similarité des distributions des survivants

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

16

16



## Particularités de la mortalité régionale dans les tables type de Coale-Demeny.

### Type « Nord »

**Donnée de base:** 9 tables en provenance de Suède (avant 1920), de Norvège et d'Islande

**Particularités:** la mortalité infantile et la mortalité aux âge très élevés sont relativement basse

### Type « Sud »

**Donnée de base:** 22 tables en provenance d'Espagne, du Portugal et d'Italie méridionale

**Particularités:** la mortalité avant l'âge de 5 ans et après l'âge de 65 est élevé, mais la mortalité dans l'intervalle d'âge 40-60 ans est faible.

### Type « Est »

**Donnée de base:** 31 tables en provenance d'Allemagne, d'Autriche, de Tchécoslovaquie, du Nord de l'Italie, d'Hongrie et de Pologne

**Particularités:** la mortalité infantile et après l'âge de 50 ans est très élevée.

### Type « Ouest »

**Donnée de base:** toutes les autres tables (130) de l'Europe de l'Ouest, des populations européennes d'outre-mer, de Japon (milieu de 20e siècle) et de Taiwan

**Particularités:** il n'y a pas des déviations substantielles.

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

17

17

## Sélection d'une table de mortalité dans les tables la mortalité type régionales de Coale-Demeny.

**1<sup>ère</sup> étape:** Choisir la famille des table (Nord, Sud, Est, sinon – Ouest) à partir de l'analyse de la mortalité par âge.

**2<sup>ème</sup> étape:** Choisir le niveau de mortalité à partir de l'espérance de vie à l'âge 10 ans ( $e_{10}$ )

### **24 niveau de mortalité dans chaque famille**

Niveau 1  $\rightarrow e_{10}=20,0$

Niveau 2  $\rightarrow e_{10} = 22,5$  (niveau 1 + 2,5)

Niveau 3  $\rightarrow e_{10} = 25,0$  (niveau 1 + 2,5)

.....

Niveau 24  $\rightarrow e_{10} = 77,5$  (niveau 23 + 2,5)

La dernière révision (modification) des tables de Princeton date de 1989 et concerne les âges >80 ans: croissance exponentielle de Gompertz a été remplacé par la croissance linéaire du  $[\ln({}_5m_x) - \ln({}_5m_{x-5})]$ , et l'augmentation de  $e_0$  jusqu'à 80 ans (niveau) pour toutes les familles de tables – types

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

18

18

### 3. Tables type de mortalité : le système Ledermann

Ledermann, S. et J.Breas (1959) – « Les dimensions de la mortalité » *Population*, vol.14, N°4, p.637-682 (ACP)  
 Ledermann, Sully (1969) – *Nouvelles tables-types de Mortalité*. INED, Travaux et Document, cahier N° 53. Paris PUF  
 Le Bras Hervé. « Nouvelles tables-types de mortalité. Présentation d'un cahier de l'I.N.E.D. », *Population*, 23<sup>e</sup> année, n°4, 1968. pp. 739-744;

**Données de base:** 154 tables de mortalité (presque la même base que les NU ont utilisée pour les tables type 1955)

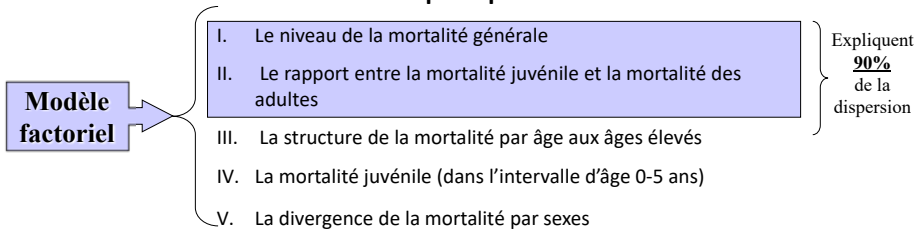
**Principe de construction:** analyse factorielle (analyse des composantes principales), modèle de régressions avec un ou deux paramètres, et sept ou cinq variables indépendantes (entrées) respectivement.

+ **Avantage:** flexibilité extrême du modèle grâce à la multitude des variables indépendantes, moyens statistiques d'évaluation de la magnitude de la divergence entre valeurs observées et celles estimées

- **Désavantage:** les relations dures entre la mortalité féminine et celle masculine (p.ex. impossible scénario où  $e_0^h > e_0^f$ )  
 Il est souvent difficile d'estimer les variables faute des données nécessaires

### Tables type de Ledermann (suite)

#### 5 facteurs principaux:



**Modèle à un paramètre:**  $\lg {}_5q_x = a_0(x) + a_1(x) \cdot \lg Q \pm 2 \cdot s_x$   $s_x$  – erreur type (c'est optionnel)

Variables indépendantes:  $e_0, {}_1q_0, {}_5q_0, {}_{15}q_0, {}_{20}q_{30}, {}_{20}q_{45}, m_{50+}$

**Modèle à deux paramètres:**  $\lg {}_5q_x = b_0(x) + b_1(x) \cdot \lg Q_1 + b_2(x) \cdot \lg Q_2 \pm 2 \cdot s_x$

Variables indépendantes en couple:  $Q_1 = {}_5q_0 \times 1000$  et  $Q_2 = {}_{20}q_{45} \times 1000$  ;

il est possible par ailleurs d'appliquer les couples  ${}_{15}q_0$  et  ${}_{20}q_{30}$  ;  ${}_{15}q_0$  et  $m_{50+}$

Toutes les variables indépendantes se réfèrent à chaque sexe à l'exception de  ${}_{20}q_{30}$  qui se réfère à la mortalité féminine uniquement.

### Tables-type de Ledermann 1 entrée

$$\lg_5 q_x = a_0(x) + a_1(x) \cdot \lg Q \pm 2 \cdot s_x$$

*lg = logarithme décimale (de base 10) ou log<sub>10</sub>; quotients p.1000; S<sub>x</sub> est l'erreur-type*

1)  $Q = \left(1 - \frac{S_{50}^F}{S_{30}^F}\right) \cdot 1000 = (1 - 97197 / 99168) \times 1000 = 19,8754$       2)  $\lg Q = \lg(19,8754) = 1,2983$

3)  $\lg_n q_x = a_0(x) + a_1(x) \cdot \lg Q \pm 2 \cdot s_x$       4)  ${}_n q_x = 10^{(\lg_n q_x)}$

Table type France 2008-2010 (calculs en ‰)

Ledermann 1 entrée						20Q30(F)									
x	tableau 104 M			tableau 104 F						Hommes			Femmes		
	a0(x)	a1(x)	s(x)	a0(x)	a1(x)	s(x)	médiane	+2s	-2s	médiane	+2s	-2s	médiane	+2s	-2s
0	-0.22091	1.06009	0.12323	-0.47773	1.14473	0.13166	0	14.30	25.23	8.11	10.20	18.70	5.56		
1	-2.36521	1.90995	0.17434	-2.63745	2.02657	0.18514	1	1.30	2.91	0.58	0.99	2.31	0.42		
5	-1.94537	1.49323	0.14533	-2.50610	1.73814	0.13046	5	0.98	1.92	0.50	0.56	1.03	0.31		
10	-1.57599	1.23648	0.09729	-2.28551	1.57130	0.10862	10	1.07	1.67	0.68	0.57	0.94	0.34		
15	-1.06772	1.09915	0.09499	-1.84746	1.45595	0.09631	15	2.29	3.54	1.48	1.10	1.72	0.71		
20	-0.97845	1.13048	0.10637	-1.63270	1.41370	0.08679	20	3.09	5.04	1.89	1.59	2.38	1.07		
25	-1.00334	1.14990	0.08888	-1.47801	1.36204	0.06163	25	3.09	4.65	2.05	1.95	2.59	1.47		
30	-0.90987	1.12231	0.07638	-1.32682	1.30808	0.03721	30	3.53	5.01	2.48	2.35	2.79	1.98		
35	-0.72924	1.06959	0.06405	-1.01560	1.18517	0.02110	35	4.56	6.13	3.40	3.34	3.68	3.03		
40	-0.34395	0.93501	0.06912	-0.65000	1.04094	0.01186	40	7.41	10.19	5.39	5.03	5.31	4.76		
45	0.14075	0.76160	0.06993	-0.13285	0.83607	0.03159	45	13.48	18.60	9.77	8.97	10.37	7.75		
50	0.56188	0.62471	0.07062	0.25087	0.71293	0.04141	50	23.60	32.67	17.05	15.01	18.17	12.41		
55	0.92476	0.51882	0.07344	0.56041	0.63438	0.05162	55	39.66	55.62	28.28	24.21	30.71	19.09		
60	1.28459	0.42093	0.06699	0.92137	0.54406	0.05226	60	67.78	92.27	49.79	42.44	53.98	33.36		
65	1.64323	0.32596	0.06177	1.28508	0.45518	0.05612	65	116.53	154.87	87.68	75.17	97.34	58.05		
70	1.90536	0.27648	0.05324	1.70368	0.34393	0.05278	70	183.79	234.85	143.83	141.32	180.21	110.83		
75	2.23374	0.19048	0.05130	2.10525	0.22992	0.05179	75	302.72	383.39	239.02	253.37	321.62	199.61		
80	2.56071	0.09595	0.04824	2.45976	0.12846	0.05045	80	484.49	605.01	387.97	423.20	533.88	335.46		

IDUP, Master de démographie: Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP et Jitka Rychtaříková, Université Charles à Prague 21

21

### Tables-type de Ledermann 2 entrées

$$\log_5 q_x = b_0(x) + b_1(x) \cdot \log Q1 + b_2(x) \cdot \log Q2 \pm 2S_x$$

*Logarithme décimale (de base 10) ou log<sub>10</sub>; quotients p.1000; S<sub>x</sub> est l'erreur-type*

Q1 =  $(1 - S_{15}^{MF} / S_0) * 1000 = [(1 - 99422 + 99524) / 200000] * 1000 = 5.2700$ ;  $\log_{10}(5.2700) = 0.7218$

Q2 =  $(1 - S_{20}^F / S_{30}^F) * 1000 = (1 - 97197 / 99168) * 1000 = 19.8754$ ;  $\log_{10}(19.8754) = 1.2983$

Table type France 2008-2010

Ledermann 2 entrées								15Q0(MF)			20Q30(F)					
x	tableau 2 (M)			s	tableau 2 (F)						Hommes			Femmes		
	b0	b1	b2		b0	b1	b2	s	médiane	+2s	-2s	médiane	+2s	-2s	médiane	+2s
0	0.30603	0.95702	-0.19020	0.05356	0.10203	1.05296	-0.23089	0.04901	0	5.62	7.19	4.39	3.65	4.57	2.91	
1	-1.65487	1.29012	0.22450	0.08940	-1.89282	1.35238	0.25978	0.09834	1	0.37	0.56	0.24	0.26	0.41	0.17	
5	-1.57653	0.66989	0.61807	0.12285	-2.10866	0.72182	0.79513	0.10006	5	0.51	0.90	0.29	0.28	0.44	0.18	
10	-1.35880	0.39446	0.72114	0.08586	-2.08334	0.36719	1.09159	0.09992	10	0.73	1.08	0.49	0.40	0.63	0.25	
15	-0.98183	0.15600	0.89535	0.09327	-1.77215	0.13678	1.27726	0.09495	15	1.96	3.02	1.28	0.97	1.50	0.62	
20	-0.90656	0.13058	0.95990	0.10525	-1.60596	0.04857	1.35025	0.08660	20	2.72	4.41	1.67	1.52	2.27	1.02	
25	-0.96542	0.06887	1.05993	0.08849	-1.46792	0.01831	1.33812	0.06151	25	2.89	4.34	1.92	1.92	2.54	1.44	
30	-0.86001	0.09056	1.00400	0.07564	-1.31302	0.02508	1.27532	0.03705	30	3.23	4.57	2.28	2.30	2.72	1.94	
35	-0.70102	0.05125	1.00264	0.06377	-0.98301	0.05919	1.10784	0.01989	35	4.34	5.82	3.24	3.15	3.45	2.87	
40	-0.29549	0.08803	0.82001	0.06845	-0.65493	-0.00895	1.05263	0.01170	40	6.80	9.32	4.96	5.07	5.35	4.81	
45	0.18151	0.07403	0.66488	0.06931	-0.16206	-0.05306	0.90539	0.03075	45	12.54	17.25	9.11	9.44	10.88	8.20	
50	0.58836	0.04809	0.56188	0.07033	0.21643	-0.06256	0.79466	0.04078	50	22.52	31.13	16.29	15.96	19.26	13.23	
55	0.93095	0.01124	0.50414	0.07327	0.54471	-0.02851	0.67163	0.05165	55	39.23	54.97	27.99	24.90	31.58	19.63	
60	1.29465	0.01826	0.39707	0.06686	0.94088	0.03544	0.49776	0.05210	60	66.58	90.59	48.94	40.99	52.11	32.25	
65	1.68789	0.08112	0.21998	0.06108	1.32087	0.06500	0.37026	0.05565	65	107.66	142.63	81.26	70.55	91.16	54.60	
70	1.94367	0.06957	0.18560	0.05268	1.77280	0.12553	0.17993	0.05060	70	171.73	218.88	134.74	125.03	157.84	99.04	
75	2.27473	0.07445	0.09322	0.05044	2.17311	0.12324	0.06891	0.04956	75	281.51	355.12	223.16	224.66	282.26	178.82	
80	2.61077	0.09091	-0.02282	0.04692	2.52033	0.11001	-0.01526	0.04857	80	443.37	550.30	357.21	380.12	475.41	303.94	

$$q_x = 10^{[b_0(x) + b_1(x) \cdot \log Q1 + b_2(x) \cdot \log Q2 \pm 2S_x]}$$

IDUP, Master de démographie: Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP et Jitka Rychtaříková, Université Charles à Prague 22

22

### 4. Modèle relationnel de mortalité de W.Brass

**Brass, William** – "On the Scale of Mortality" in W.Brass, ed. *Biological Aspects of Demography*. London: Taylor and Francis Lmt; NY: Barnes & Noble Inc.1971, p.69-110

**Rolland Pressat** – *Elements de démographie mathématique*, Paris, édition de l'AIDELF, 1995 p.41-47 ("Familles de tables de mortalité")

**La base théorique:** la logit-transformation de  $q(x)$ , la probabilité de mourir avant l'âge  $x$

$$\text{logit}[q(x)] = \frac{1}{2} \cdot \ln \left[ \frac{q(x)}{1-q(x)} \right] \quad \text{où } 0 \leq q(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -\infty \leq \text{logit}[q(x)] \leq +\infty$$

Soit  $\text{logit}[q(x)] = Y(x)$  alors  $\hat{Y}(x)$  étant la prédiction de la valeur de  $Y(x)$  entre  $-\infty$  et  $+\infty$  permet de prédire la valeur de  $q(x)$

$$\text{Donc } \hat{q}(x) = \frac{\exp[2 \cdot \hat{Y}(x)]}{1 + \exp[2 \cdot \hat{Y}(x)]} \quad \text{et} \quad \hat{p}(x) = 1 - \hat{q}(x) = \frac{1}{1 + \exp[2 \cdot \hat{Y}(x)]}$$

**Modèle (d'origine) de W.Brass**  $\hat{Y}(x) = \alpha + \beta \cdot Y^s(x)$  où  $Y^s(x)$  – un standard quelconque

---

**Modification de Ewbank, Gomez de Leon et Soto (1983)** (\*)

quand  $\lambda$  et  $\kappa \rightarrow 0$ , ce modèle s'approche de sa version classique. L'augmentation du score de  $\lambda$  et de  $\kappa$  respectivement augmente la survie aux jeunes âges ou la diminue aux âges élevés

$$T^s(x) = \begin{cases} \frac{\left( \frac{p^s(x)}{1-p^s(x)} \right)^\kappa - 1}{2 \cdot \kappa} & \text{quand } p^s(x) \geq 0,5; \\ \sin & \\ \frac{1 - \left( \frac{p^s(x)}{1-p^s(x)} \right)^\lambda}{2 \cdot \lambda} & \text{quand } p^s(x) < 0,5; \end{cases}$$

\*1) Ewbank D.C., J.C.Gomez de Leon, M.A. Soto (1983) – "A Reducible Four-parameter System of Model Life Tables" *Population Studies*. V.37, no 1, p.105-127

23

23

### Tables de mortalité construites à partir de logit système (standard général de Brass)

$\alpha=0$

$\beta=1$

**Application pour les projections:**

1. Choisir le standard (critères: la qualité des données et similarité avec la population à projeter)
2. Analyser la dynamique des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  (tendance, régression, etc.)
3. Calculer les tables de mortalité

24

24

### Modèle relationnel de mortalité de W. Brass (exemple, France)

$\hat{Y}(x) = \alpha + \beta \cdot Y^s(x)$        $p(x) = S_x/S_0$        $p(x)$  étant la probabilité de survie jusqu'à l'âge  $x$

**logit  $p(x) = \alpha + \beta \cdot \text{logit } p_s(x)$**       Deux tables de mortalités différentes sont reliées par la relation linéaire.

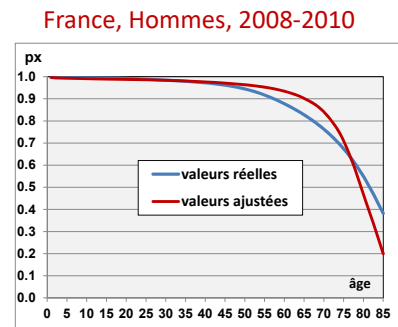
$\text{logit}[p(x)] = 0.5 \cdot \ln\{p(x)/[1-p(x)]\}$        $p(x) = e^{2\text{logit}[p(x)]} / \{1 + e^{2\text{logit}[p(x)]}\}$

âge	$p_x$	logit( $p_x$ )	Brass( $p_x$ )	$p_x(\text{modèle})$	$p_x(\text{modèle})$
1	0.99608	2.76887	0.86690	2.76926	0.99608
5	0.99526	2.67348	0.60160	2.41407	0.99206
10	0.99479	2.62598	0.54980	2.34472	0.99089
15	0.99422	2.57378	0.51320	2.29572	0.98996
20	0.99201	2.41077	0.45500	2.21780	0.98829
25	0.98824	2.21561	0.38290	2.12127	0.98583
30	0.98398	2.05888	0.31500	2.03036	0.98306
35	0.97919	1.92565	0.24970	1.94294	0.97988
40	0.97229	1.77893	0.18160	1.85176	0.97596
45	0.96164	1.61081	0.10740	1.75242	0.97083
50	0.94449	1.41704	0.02120	1.63702	0.96353
55	0.91668	1.19903	-0.08320	1.49725	0.95232
60	0.87744	0.98420	-0.21000	1.32748	0.93432
65	0.82702	0.78233	-0.37460	1.10711	0.90152
70	0.76205	0.58198	-0.58180	0.82971	0.84016
75	0.67370	0.36248	-0.86730	0.44748	0.70991
80	0.54873	0.09777	-1.24900	-0.06355	0.46827
85	0.38207	-0.24039	-1.72110	-0.69561	0.19921

a      1.60864 ordonnée à l'origine

b      1.33882 pente

25



Le standard de Brass (général)  
n'est pas convenable.

25

### Modèle relationnel de mortalité de W. Brass (application, RT)

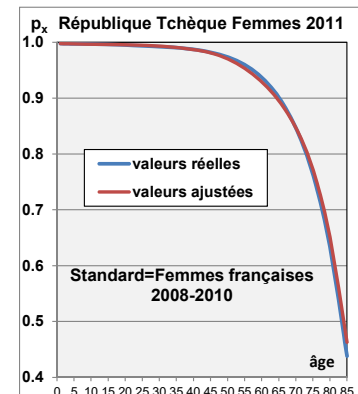
**Le standard étant la mortalité des femmes françaises en 2008-2010**  
**L'estimation des valeurs ajustées pour les femmes tchèques en 2011**

âge	Rép. Tchèque $p_x$	standard logit $\text{logit}(p_x)$	France( $p_x$ )	logit $p_x(\text{modèle})$	$p_x(\text{modèle})$
1	0.99766	3.02661	2.85984	3.0190	0.99762
5	0.99714	2.92777	2.76759	2.9108	0.99705
10	0.99680	2.87131	2.72009	2.8550	0.99670
15	0.99617	2.78080	2.67137	2.7978	0.99630
20	0.99498	2.64435	2.58522	2.6967	0.99547
25	0.99355	2.51882	2.48758	2.5821	0.99431
30	0.99231	2.43021	2.39037	2.4680	0.99287
35	0.99039	2.31765	2.28018	2.3386	0.99078
40	0.98730	2.17672	2.14051	2.1747	0.98725
45	0.98200	1.99968	1.96806	1.9722	0.98101
50	0.97356	1.80311	1.77302	1.7433	0.97030
55	0.95979	1.58633	1.57173	1.5070	0.95320
60	0.93698	1.34957	1.38353	1.2861	0.92905
65	0.90162	1.10770	1.20278	1.0739	0.89547
70	0.84664	0.85423	1.01646	0.8552	0.84690
75	0.76367	0.58644	0.80951	0.6123	0.77288
80	0.63380	0.27428	0.55409	0.3125	0.65136
85	0.43805	-0.12454	0.22458	-0.0743	0.46293

a      -0.33789 ordonnée à l'origine


b      1.17382 pente

26



Ajustement est satisfaisant  
(grâce au choix raisonné du  
standard)

26



## 5 Nouvelles tables type des Nations Unies établies pour les pays en voie de développement (1982)

United Nations (1982) – *Model Life Tables for Developing Countries*. NY, United Nations, Population Studies, no. 77

<https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/manual/model/life-tables.asp>

**Données de base:** initialement 286 (143+143) tables de mortalité (54 – Afrique, 50 – Amérique Latine, 39 – Asie), après la sélection seulement 72 tables ont été retenues (dont une de l'Afrique – Tunisie)

**Principe de construction:**

- 1) sélection et classification des tables en appliquant la procédure de Coale-Demeny,
- 2) analyse de composants principaux et
- 3) approche relationnelle de W.Brass pour déterminer les paramètres du modèle dans chaque classe (cluster).

**Structure:** 4 familles de tables régionales sont retenues; elles sont dérivées du modèle à un paramètre ( $k=1$ ) avec  $e_{10}$  comme entrée unique et la possibilité de modifier le scénario de mortalité en modifiant les autres paramètres du modèle de base.

$$\text{logit } {}_n q_x = U_{0x}^C + \sum_{i=1}^k a_i \cdot U_{ix}^C$$

$U_{0x}^C$  – le standard ou la moyenne pour la famille C

$U_{ix}^C$  – les caractéristiques de la déviation du standard C

$a_i$  – l'ampleur de la déviation du standard

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 27

27

## Particularités de la mortalité régionale dans les tables type de Nations Unies 1983

**Type « Amérique Latine »**

**Donnée de base:** Tables en provenance de l'Amérique Latine, Philippines, Sri Lanka et Thaïlande

**Particularités:** la mortalité juvénile et la mortalité des jeunes adultes sont extrêmement hautes, en revanche la mortalité infantile et la mortalité aux âges élevés est relativement basse

**Type « Chili »**

**Donnée de base:** Chili (1950, 1960, 1970)

**Particularités:** la mortalité infantile est très élevée à cause (probablement) des maladies respiratoires

**Type « Asie du Sud »**

**Donnée de base:** Tables en provenance des pays d'Asie du Sud, d'Asie de l'Ouest et de Tunisie

**Particularités:** la mortalité est forte aux âges jeunes et aux âges élevés

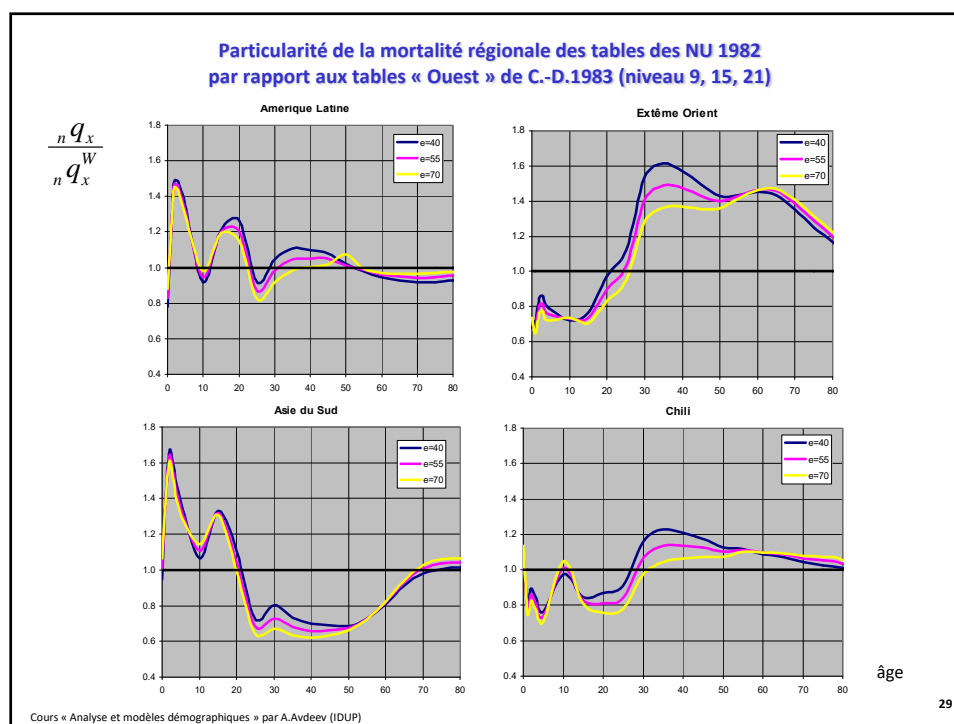
**Type « Extrême Orient »**

**Donnée de base:** Tables en provenance des pays d'Asie de l'Est mais aussi de la Malaisie, de la Guyane et de Trinidad et Tobago

**Particularités:** la mortalité est forte après l'âge 40 et surtout parmi les personnes âgées, probablement à cause de la tuberculose et de l'hépatite B.

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 28

28



29

## Modifications et perfectionnement récents des tables type de mortalité (UN version 2010)

### *World Population Prospects 2010: Extended Model Life Tables*

« With the extension of the projection horizon for all countries up to 2100 as part of the 2010 revision of the UN *World Population Prospects*, it was necessary to allow life expectancy at birth to go beyond 92.5 years. In addition, in-depth analysis of the initial 1998 extension revealed substantial deviation for out-of-sample predictions compared to the Human Mortality Database experience at very low mortality levels (especially for Coale-Demeny models, see Figure 1 in Willmoth et al., 2009), and the need to improve a smoother transition between the existing set of model life tables up to age 75 and their extension. A new set extended model life tables was computed in Spring 2010 by staff of the Population Division (Gerland and Li) based on the modified Lee-Carter approach. After extensive cross-validation against the Human Mortality Database (HMD) performed by Kirill Andreev some constraints have been imposed to ensure some convergence toward the HMD mortality experience at high levels of  $e(0)$ . The nine families of model life tables extended up to  $e(0)=100$  were smoothly blended to the existing ones to insure smooth mortality surfaces by age and sex and  $e(0)$  levels. »

De nouvelles tables type de mortalité sont téléchargeables à partir  
<http://esa.un.org/wpp/Model-Life-Tables/download-page.html>

**Literature:** Li, N. and P. Gerland (2011). "Modifying the Lee-Carter Method to Project Mortality Changes up to 2100" Paper presented at the 2011 Annual Meeting of the Population Association of America (PAA) in Session 125: Formal Demography I: Mathematical Models and Methods on Friday 1 April -  
<http://paa2011.princeton.edu/sessionViewer.aspx?SessionId=1002>

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

30

30

Selected application is UNAABR (unabr.mpl)

Input File Name: C:\Program Files (x86)\MORTPAK4\unabr.mpl  
When last updated: 11 February 2002

HYPOTHETICAL POPULATION					Unabridged life table				
Age Group	Observed q(x,n)	Fitted q(x,n)	Difference	Ratio	Age	m(x,n)	q(x,n)	lx	e(x)
0 - 1	0.03500	0.03500	0.00000	1.00	0	0.03500	0.03500	100000	69.79
1 - 5	0.00600	0.00606	0.00006	1.01	1	0.00246	0.00246	96500	71.31
5 - 10	0.00350	0.00334	-0.00016	0.95	2	0.00153	0.00153	96263	70.49
10 - 15	0.00290	0.00310	0.00020	1.07	3	0.00115	0.00115	96115	69.60
15 - 20	0.00570	0.00510	-0.00060	0.89	4	0.00094	0.00094	96005	68.67
20 - 25	0.00785	0.00825	0.00040	1.08	5	0.00080	0.00080	95915	67.74
25 - 30	0.01120	0.01104	-0.00016	0.99	6	0.00071	0.00071	95838	66.79
30 - 35	0.01350	0.01320	-0.00030	0.98	7	0.00065	0.00065	95769	65.84
35 - 40	0.01575	0.01553	-0.00022	0.99	8	0.00060	0.00060	95707	64.88
40 - 45	0.01825	0.01821	-0.00004	1.05	9	0.00056	0.00056	95649	63.92
45 - 50	0.02750	0.02566	-0.00184	0.93	10	0.00057	0.00057	95594	62.96
50 - 55	0.03500	0.03601	0.00101	1.05	11	0.00057	0.00057	95540	61.99
55 - 60	0.05500	0.05443	-0.00057	0.99	12	0.00060	0.00060	95485	61.03
60 - 65	0.08500	0.08247	-0.00253	0.97	13	0.00065	0.00065	95428	60.07
65 - 70	0.12500	0.12526	0.00026	1.00	14	0.00071	0.00071	95366	59.10
70 - 75	0.18500	0.18844	0.00344	1.02	15	0.00080	0.00080	95298	58.15
75 - 80					16	0.00090	0.00090	95222	57.19
80 - 85					17	0.00101	0.00101	95136	56.24
					18	0.00114	0.00113	95040	55.30
					19	0.00126	0.00126	94932	54.36
					20	0.00140	0.00140	94812	53.43
					21	0.00153	0.00153	94680	52.50
					22	0.00166	0.00166	94535	51.58
					23	0.00179	0.00178	94378	50.67
					24	0.00191	0.00190	94210	49.76
					25	0.00202	0.00202	94030	48.85
					26	0.00213	0.00212	93841	47.95
					27	0.00223	0.00222	93641	47.05
					28	0.00232	0.00232	93433	46.15
					29	0.00241	0.00241	93217	45.26
					30	0.00249	0.00249	92992	44.37
					31	0.00258	0.00257	92761	43.48
					32	0.00266	0.00265	92522	42.59

Parameters	
A=	0.00241
B=	0.00582
C=	0.11400
D=	0.00146
E=	3.11948
F=	30.56960
G=	0.00006
H=	1.09593

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)