In Economies et Sociétés, Série Œconomia, PE n° 15, mai 1991, pp. 117-137

La première démonstration d'existence d'un équilibre général, par Abraham Wald (1935-1936)

Philippe Le Gall*
G.R.E.S.E. – Université Paris I

Cet article précise les conditions historiques qui ont permis à Abraham Wald de construire la première démonstration mathématique de l'existence d'un équilibre général walrasien. Wald a fourni cette preuve dans le cadre du séminaire de mathématiques de Karl Menger, au sein du Cercle de Vienne ; nous verrons qu'elle porte à la fois la marque des succès et de la dislocation de la réflexion viennoise.

This article specifies the historical conditions which enabled Abraham Wald to construct the first mathematical demonstration of the existence of a Walrasian general equilibrium. Wald gave this proof in the mathematical seminar of Karl Menger, within the Vienna Circle ; we shall see that this proof has the characteristics of the successes and the dispersal of the Viennese thought.

Walras, dans les *Eléments d'Economie Pure* [1874], a tenté de conceptualiser le fait que les décisions des agents de l'économie, guidés par leur seul intérêt propre et sans concertation, ne conduisent pas à un

---

* Centre PMF, 90 rue de Tolbiac, 75634 Paris Cedex 13. L'auteur remercie Annie Cot, Jérôme Glachant, Bernard Guerrien, Jérôme Lallement, Franck Portier et André Zylberberg pour leurs observations et critiques.

chaos social. Avant lui, Cournot [1838] avait compris qu'une solution complète des problèmes partiels de l'économie nécessitait la prise en compte du système dans son ensemble ; il pensait cependant que le problème de l'équilibre général dépassait les possibilités de l'analyse mathématique. Walras, en souhaitant élever l'économie mathématique au rang d'une science, au même titre que l'astronomie ou la mécanique mathématique, s'est efforcé de montrer qu'il était possible de résoudre le problème envisagé par Cournot.

Seul un modèle mathématique – un système d'équations simultanées – pouvait rigoureusement prendre en compte les interdépendances des variables décrivant l'économie. En construisant un système de production par secteur permettant de déterminer les prix, les quantités de services offerts et de biens demandés, Walras fonde la théorie de l'équilibre général. Pour lui, la cohérence interne du système et du mécanisme de formation des prix en concurrence pure provient de l'égalité du nombre d'équations et du nombre d'inconnues, signe que le mécanisme du tâtonnement conduit à l'existence et à la stabilité de l'équilibre (Zylberberg [1989], p.14).

La philosophie théorique de Walras est cependant mise en sommeil : au cours des cinq décennies suivantes, aucun argument ne vient conforter l'existence d'un équilibre général. Les économistes se contentent de compter le nombre des équations et le nombre des inconnues de leurs systèmes, puis de s'assurer de leur égalité, qui ne rend l'équilibre que *possible*. L'existence d'un équilibre général est-elle alors une question fondamentale ? La théorie de l'équilibre général s'est développée sans réellement l'approfondir. Nous allons montrer que, si la question exige une réponse d'ordre purement mathématique, cette réponse est totalement dépendante du développement des interpénétrations entre l'économie et les mathématiques, qui surviendront dans des circonstances historiques très particulières.

La première étape importante – mais involontaire – dans la recherche de l'existence d'un équilibre se situe en Suède. Le mathématicien Gustav Cassel, dans son *Traité d'Economie Politique* – dont la première édition allemande date de 1918 – présente un système walrasien maniable, basé sur des fonctions de demande simplifiées. La grande simplicité du système de Cassel provient du fait que ce dernier rejette la théorie de l'utilité ; il utilise des prix et des fonctions de demande sans s'interroger sur leurs fondements : « Cassel a placé les prix au cœur de sa théorie d'allocation, et a utilisé les facteurs de demande comme concepts premiers » (Weintraub [1985], p. 59). Il souligne que, afin d'éclaircir le problème de la formation des prix, « il est nécessaire de représenter sous forme mathématique les rapports internes du processus de la formation des prix relevant de la connaissance générale d'un système d'équations à plusieurs inconnues » (Cassel [1929]; p. 185). Si Cassel prend comme point de départ un système walrasien sans fonction d'utilité, Wicksell et Schumpeter font observer qu'il ne fait jamais référence aux travaux de l'économiste français.

Si, dans le système de Cassel, le nombre d'équations est toujours égal au nombre d'inconnues, Hans Neisser [1932] puis Heinrich von Stackelberg [1933] prouvent que cette égalité n'est guère suffisante : leur résolution du système de Cassel aboutit à des valeurs non positives des prix et des quantités d'équilibre, sans signification économique. Mais leurs travaux, publiés en langue allemande, sont restés largement confidentiels.

Ainsi, Walras et Cassel n'ont que *suggéré* l'équilibre, et leur système attendait une solution véritable. La première réponse a été rendue possible par une conjonction étonnante de circonstances à Vienne, au début des années 1930, dans le cadre du séminaire de mathématiques de Karl Menger, fils de l'économiste Carl Menger. Karl Schlesinger [1934], ayant connaissance des résultats de Neisser et Stackelberg, va d'abord compléter le système de Cassel de manière à y prendre en compte les facteurs de production libres – il s'appuie sur une suggestion faite, dans un contexte autre, par Frederik Zeuthen en 1932 – et donc permettre de lever l'hypothèse de rareté de ces facteurs, caractéristique de l'économie de Walras; il demande ensuite à Abraham Wald de le résoudre. Les conditions mathématiques de cette résolution donnent naissance à trois articles, publiés entre 1935 et 1936, qui établissent la première preuve d'existence d'un équilibre général.

Précisons d'emblée que le travail de Wald va introduire de nouveaux procédés de raisonnement en économie. Il n'est plus possible de se satisfaire d'une énumération d'équations et d'inconnues, puis de se réjouir de l'égalité de leur nombre : « les économistes doivent, comme dans les autres disciplines, montrer que leurs constructions ont une solution ayant un sens » (Menger, in Wald [1935], p. 288).

Ayant établi le fil historique du problème de l'existence d'un équilibre général, nous allons désormais, dans une première partie, décrire précisément le système de Cassel. Après avoir évoqué, dans une seconde partie, le Cercle de Vienne, et en particulier la place accordée aux mathématiques, puis les rapports existant entre les trois personnages centraux de l'histoire – Menger, Schlesinger, Wald – nous examinerons, dans une troisième partie, le système de Schlesinger puis le contenu des démonstrations d'existence qui forment les trois articles de Wald – dans lesquels il va progressivement affiner les conditions d'existence. Enfin, nous dresserons les conséquences – pour Wald comme pour l'économie – de ces démonstrations.

I. — LE SYSTÈME SIMPLIFIÉ DE CASSEL (1918)

Cassel a donc construit, en 1918, un modèle d'équilibre général plus simple, clair et maniable, que celui de Walras, et se prêtant plus aisément à un traitement mathématique. La majorité des économistes anglo-saxons découvrent d'ailleurs la pensée de l'équilibre général à travers cet ouvrage.

Examinons en détail ce modèle, que Cassel développe dans le chapitre XVI, intitulé « Etudes arithmétiques du problème de l'équilibre », du livre 4, « Le mécanisme de la formation des prix. »

Il y a, dans l'économie de Cassel[1] :

- r facteurs de production, indicés i, disponibles en quantité R_1, R_2, ..., R_r, pour une période donnée;
- n biens de consommation, indicés j, dont les demandes sont N_1, N_2, ..., N_n, et les offres A_1, A_2, ..., A_n.

Les biens de consommation sont produits à l'aide d'une technologie linéaire caractérisée par les coefficients a_{ij}, la production d'une unité du bien j exigeant a_{ij} unité du facteur de production i. Les prix des facteurs de production sont $q_1, q_2, \ldots, q_r$, ceux des biens produits sont $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Dès que les prix des facteurs de production sont connus, on peut calculer les prix des biens :

$$p_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} q_i, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Ces équations décrivent le « principe du coût » : les prix des facteurs utilisés pour la production d'un bien permettent de déterminer le prix de ce bien (il n'y a ni bénéfice, ni perte). Les prix des produits finis étant connus, la demande totale de chaque bien peut être déterminée à l'aide des équations :

$$N_j = F_j(p_1, p_2, \ldots, p_n), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Selon le principe de rareté invoqué par Cassel – la définition de la rareté exclut chez lui toute notion d'utilité, « quand les prix sont à l'équilibre, toute demande doit être satisfaite par l'offre » (Cassel [1929], p. 193); on peut donc calculer « les efforts demandés à la production [2] » :

$$N_j = A_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Les quantités offertes étant ainsi connues, on peut calculer les demandes de facteurs de production : il faut, pour une production continue de quantités $A_1, A_2, \ldots, A_n$, du moyen de production i la quantité :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{4}$$

A l'équilibre, et d'après le principe de rareté, la demande des facteurs de production doit être égale à la quantité disponible de ces facteurs de production, puisque « la tâche de la formation des prix est de réduire la demande autant qu'il est nécessaire à cet effet » (*ibid*, p. 194) :

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{5}$$

Voilà comment Cassel envisage le problème de la formation des prix. Le système (5) « renferme comme inconnues les r prix des moyens de production. Il contient aussi r équations, et cela suffit ainsi en général à déterminer les inconnues » (*ibid*). Terminons la présentation du système de Cassel en insistant sur le fait que celui-ci se place dans une situation de rareté des facteurs de production, hypothèse remise en cause par Schlesinger, ce qui nous donne l'occasion de nous déplacer en Autriche, plus particulièrement dans le séminaire de mathématiques organisé par Karl Menger au sein du Cercle de Vienne.

II. – LE CERCLE DE VIENNE

Après la formulation du système de Cassel, la résolution du problème de l'existence d'un équilibre a été rendue possible dans des circonstances historiques extrêmement précises, au sein du Cercle de Vienne, plus exactement dans un groupe de réflexion sur les mathématiques pures et leur application (par exemple à l'économie), animé par Menger. Avant d'en étudier le fonctionnement, examinons l'importance attribuée par les chercheurs viennois aux mathématiques.

1. Vers un langage mathématique

Les membres du Cercle de Vienne, partisans de l'empirisme logique – Schlick, Carnap, Hahn, Neurath – se donnent comme fin d'éliminer la métaphysique de la science, puis d'unifier celle-ci au nom d'une méthode logique, articulée à une définition rigoureuse de ce qu'est un énoncé doué de sens, et susceptible de faire avancer la connaissance. Les membres du Cercle de Vienne ont ainsi un intérêt particulier pour la révélation d'un « idiome formel »; « abstraire de la *Connaissance Scientifique du Monde* les composantes linguistiques et sociales qui entrent dans sa construction logique serait (...) nier le Cercle de Vienne dans ce qu'il avait de plus spécifique » (Soulez [1985], p. 22). Le but est d'arriver à développer la compréhension mutuelle entre les nations par des procédés logico-linguistiques : ce fut notamment le projet de Carnap. L'idéal d'une science universelle est intimement lié à l'existence d'un « système conceptuel exact, dont la commodité et la simplicité de structure seraient une véritable source de plaisir, dans le but également de favoriser la paix en travaillant à l'élaboration formelle de systèmes linguistiques parallèlement aux travaux des linguistes sur la construction d'un langage international » (*ibid*).

Ils posent comme solution à ce problème un système total de concepts minimaux : « la netteté et la clarté sont visées, les lointains sombres et les profondeurs insondables refusés; en science, pas de *profondeurs*, tout n'est que surface » (*ibid*, p. 115). Les scientifiques du Cercle de Vienne ont vu dans les mathématiques ce langage. Pour eux, elles assurent que toute pensée, toute inférence, ne consiste en rien d'autre qu'une transition d'énoncés à d'autres ne contenant rien de plus que les premiers. Il ne serait ainsi pas possible de développer une métaphysique à partir de ce qui symbolise la pensée pure.

L'unification de la science se fera à partir de son langage et des faits qui la fondent. Toute connaissance scientifique provient en effet soit de l'expérience, soit de la mise sous forme tautologique de la pensée. La philosophie, qu'elle soit ou non considérée comme une véritable science, se réduit à une élucidation des propositions scientifiques portant directement ou indirectement sur l'expérience, propositions que les sciences elles-mêmes ont pour tâche de vérifier. La philosophie sera donc avant tout une philosophie de la science. Ses succès devront amorcer la fin de la métaphysique : on traitera philosophiquement toute question, dans un langage clair, et pourvu de sens.

L'importance des Mathématiques dans la philosophie et la science a été ressentie par tous les membres du Cercle de Vienne, plus particulièrement par Menger. Il a joué un rôle essentiel dans la mathématisation de l'Economie en Europe Centrale, et a beaucoup contribué à l'arrivée à Vienne de mathématiciens brillants : Brouwer, Hahn, von Neumann, Reidemeister, Tarski, Ulam. Et puis, comme il le raconte lui-même, « un homme de 25 ans contacte l'Institut de mathématiques de l'université de Vienne [3]. En raison de sa prédilection pour la géométrie, on me l'a envoyé. Il se présenta comme étant Abraham Wald » (Menger [1952], p. 14).