Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L2 MIASHS 2021/2022

Rappels d'analyse

1 Séries

$$\begin{aligned}
\forall\, p \in \left]0,1\right[, \qquad & \sum_{k=N_0}^{N_1} p^k = \frac{p^{N_0} - p^{N_1+1}}{1-p} \\
& \sum_{k=0}^{+\infty} p^k = \frac{1}{1-p} \\
& \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2} \\
& \sum_{k=2}^{+\infty} k\,(k-1)\,p^{k-2} = \frac{2}{(1-p)^3} \\
& \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \\
& \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \\
& \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} \\
\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)
\end{aligned}$$

2 Dérivation

— Soient f et g deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$. Alors

1. $f+g$ est dérivable sur I avec $(f+g)' = f' + g'$
2. fg est dérivable sur I avec $(fg)' = f'g + g'f$
3. $\frac{f}{g}$ est définie et dérivable pour tout $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$ avec

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(f'g - g'f)(x)}{(g(x))^2}$$

4. Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(f)^\alpha$ est définie et est dérivable pour tout $x \in I$ tel que $f(x) > 0$ avec

$$(f^\alpha)'(x) = \alpha\left(f' f^{\alpha-1}\right)(x)$$

— Soit f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur $f(I)$
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 avec

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0))$$

— Soit u une fonction dérivable sur I, alors $x \to \exp(u(x))$ est dérivable sur I avec

$$(\exp(u(x)))' = u'(x)\exp(u(x))$$

— Soit u une fonction strictement positive sur I. Si u est dérivable sur I, alors $x \to \ln(u(x))$ est dérivable sur I avec

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

3 Intégration

3.1 Techniques du calcul intégral

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$

Relation de Chasles
Soit f définie sur $]a, b[$ sauf éventuellement en $c \in]a, b[$
si $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ sont finies alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est finie et on pose alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties
Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[$ telles que fg' et $f'g$ sont continues sur $]a, b[$
On suppose de plus que fg admet des limites en a^+ et en b^-
Si $\int_a^b (fg')(t)dt$ est finie alors $\int_a^b (f'g)(t)dt$ est également finie et on a

$$\int_a^b \left(fg'\right)(t)dt = \lim_{x\to b^-}(fg)(x) - \lim_{x\to a^+}(fg)(x) - \int_a^b \left(f'g\right)(t)dt$$

3.2 Primitives usuelles

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + cst, \quad \alpha \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + cst$$
$$\int sin\left(x\right)dx = -\cos\left(x\right) + cst$$
$$\int cos\left(x\right)dx = \sin\left(x\right) + cst$$
$$\int \exp\left(x\right)dx = \exp\left(x\right) + cst$$
$$\int a^{x}dx = \frac{1}{\ln(a)}a^{x} + cst$$
$$\int \sinh\left(x\right)dx = \cosh\left(x\right) + cst$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin\left(x\right) + cst = -\arccos(x) + cst$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + cst$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \operatorname{argsinh}(x) + cst = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + cst$$