Correction du TD 5

Méthode générale :

Après avoir relu votre cours sur l'intégration, et en particulier les différentes dérivées de fonctions, le principe pour calculer une intégrale consiste à reconnaître une forme de dérivée connue du type :

$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qui s'intègre en $\ln\left[u(x)\right]$

$\alpha\, u'(x)\left[u(x)\right]^{\alpha-1}$ qui s'intègre en $\left[u(x)\right]^{\alpha}$

$u'(x)\exp\left[u(x)\right]$ qui s'intègre en $\exp\left[u(x)\right]$

- Dans le cas particulier d'une fonction sous la forme $P(x)*e^{u(x)}$, $P(x)*\cos(u(x))$ ou $P(x)*\sin(u(x))$ où P(x) est un polynôme de degré n et u(x) une fonction simple, le principe repose à utiliser la formule d'intégration par partie en dérivant le polynôme et en intégrant l'exponentielle, le cosinus ou le sinus. Ainsi en n intégration par partie au maximum, vous obtiendrez une intégrale simple à calculer.
- Dans le cas particulier d'une fonction sous la forme $P(x)*\ln(u(x))$ où P(x) est un polynôme de degré n, le principe consiste au contraire à dériver le polynôme et à intégrer le logarithme.
- Dans le cas particulier d'une fraction rationnelle où le dénominateur est scindé à racines simples (les racines réelles sont toutes d'ordre 1), le principe repose sur une décomposition en éléments simples que l'on sait intégrer en *ln* : $\int \dfrac{1}{a+x}dx = \ln(a+x)$

$$I_1 = \int_0^4 \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$$

$$u(x) = x^2+2x+2 \Rightarrow u'(x) = 2x+2 = 2(x+1)$$

$$I_1 = \int_0^4 \frac{\frac{1}{2}u'(x)}{u(x)}dx$$

La fonction à intégrer est à un coefficient près de la forme $\dfrac{u'}{u}$ qui s'intègre en $\ln(u)$.

Ce qui donne $I_1 = \displaystyle\int_0^4 \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left(\ln\left(16+8+2\right)-\ln\left(2\right)\right) = \frac{1}{2}\ln(13)$

$$I_2 = \int_1^4 \frac{x-0.5}{\sqrt{x^2-x+4}}dx$$

$$u(x) = x^2-x+4 \Rightarrow u'(x) = 2x-1 = 2(x-0.5)$$

$$I_2 = \int_1^4 \frac{\frac{1}{2}u'(x)}{\sqrt{u(x)}}dx = \int_1^4 \frac{1}{2}\,u'(x)\left[u(x)\right]^{\frac{1}{2}-1}dx$$

La fonction à intégrer est à un coefficient près sous la forme $\alpha\, u'\left[u\right]^{\alpha-1}$ qui s'intègre en $\left[u\right]^{\alpha}$.

Ce qui donne $I_2 = \displaystyle\int_1^4 \frac{x-0.5}{\sqrt{x^2-x+4}}dx = \left[\sqrt{x^2-x+4}\right]_1^4 = \sqrt{16-4+4}-\sqrt{1-1+4} = 2$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^3} dx$$

$$u(x) = x^2+1 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}u'(x)}{\left(u(x)\right)^3} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}u'(x)\left[u(x)\right]^{-2-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{-4}(-2)u'(x)\left[u(x)\right]^{-2-1} dx$$

La fonction à intégrer est à un coefficient près sous la forme $\alpha\, u'[u]^{\alpha-1}$ qui s'intègre en $[u]^{\alpha}$.

Ce qui donne $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^3} dx = \left[\frac{\frac{-1}{4}}{\left(x^2+1\right)^2}\right]_0^{+\infty} = 0+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$I_4 = \int_e^{e^2} \frac{1+\ln(x)}{x\ln(x)} dx$$

$$u(x) = x\ln(x) \Rightarrow u'(x) = 1+\ln(x)$$

$$I_4 = \int_e^{e^2} \frac{u'(x)}{u(x)} dx$$

La fonction à intégrer est à un coefficient près sous la forme $\frac{u'}{u}$ qui s'intègre en $\ln(u)$.

Ce qui donne $I_4 = \int_e^{e^2} \frac{1+\ln(x)}{x\ln(x)} dx = \left[\ln(x\ln(x))\right]_e^{e^2} = \ln(2e^2)-\ln(e) = \ln 2+2-1 = 1+\ln 2$

$$I_5 = \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3} dx$$

On reconnaît une fraction rationnelle (deux racines évidentes pour le dénominateur 1 et 3). Il faut donc la décomposer en éléments simples :

$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-3}$. Ainsi

$$I_5 = \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3} dx = \int_4^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} dx + \int_4^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{x-3} dx = \frac{1}{2}\left[-\ln(x-1)+\ln(x-3)\right]_4^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln 3$$

$$I_6 = \int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$$

Ici, on ne reconnaît pas de formule connue. On va donc transformer l'intégrale en simplifiant la fraction en remarquant que $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$$I_6 = \int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \int_0^{1} \sqrt{1+x}\,dx - \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) - \left(2\sqrt{2}-2\right) = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$$

Seconde méthode : on intègre par parties en posant

$$\left.\begin{matrix} u'=(x+1)^{-\frac{1}{2}} & \rightarrow & u=2(x+1)^{\frac{1}{2}} \\ v=x & & v'=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_6=\left[2x\sqrt{1+x}\right]_0^1-\int_0^1 2\sqrt{1+x}\,dx=\left[2x\sqrt{1+x}\right]_0^1-\left[\frac{4}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$I_6=2\sqrt{2}-\left(\frac{4}{3}2\sqrt{2}-\frac{4}{3}\right)=\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$$

$I_7=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp^{-|x|}\,dx=2\int_0^{+\infty}\exp^{-|x|}\,dx$ car la fonction $x\mapsto\exp^{-|x|}$ est une fonction paire.

Donc $I_7=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp^{-|x|}\,dx=2\int_0^{+\infty}\exp^{-x}\,dx=2\left[-\exp^{-x}\right]_0^{+\infty}=2$

$$I_8=\int_1^5\sqrt{2x-1}dx$$

$$u(x)=2x-1 \Rightarrow u'(x)=2$$

$$I_8=\int_1^5\frac{1}{2}u'(x)\left[u(x)\right]^{\frac{3}{2}-1}dx=\int_1^5\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}u'(x)\left[u(x)\right]^{\frac{3}{2}-1}dx$$

La fonction à intégrer est à un coefficient près sous la forme $\alpha\,u'[u]^{\alpha-1}$ qui s'intègre en $[u]^{\alpha}$.

Ce qui donne $I_8=\int_1^5\sqrt{2x-1}dx=\left[\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5=\frac{1}{3}\left((9)^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{26}{3}$

$$I_9=\int_0^3\frac{1}{\sqrt{25-3x}}dx$$

$$u(x)=25-3x \Rightarrow u'(x)=-3$$

$$I_9=\int_0^3\left[u(x)\right]^{\frac{1}{2}-1}dx=\int_0^3\frac{-2}{3}\times\frac{1}{2}u'(x)\left[u(x)\right]^{\frac{1}{2}-1}dx$$

La fonction à intégrer est à un coefficient près sous la forme $\alpha\,u'[u]^{\alpha-1}$ qui s'intègre en $[u]^{\alpha}$.

Ce qui donne $I_9=\int_0^3\frac{1}{\sqrt{25-3x}}=\left[-\frac{2}{3}\sqrt{25-3x}\right]_0^3=\frac{-2}{3}(4-5)=\frac{2}{3}$

$$I_{10}=\int_0^2\frac{x^2}{2+x^3}dx$$

$$u(x)=2+x^3 \Rightarrow u'(x)=3x^2$$

$$I_{10}=\int_0^2\frac{\frac{1}{3}u'(x)}{u(x)}dx$$

La fonction à intégrer est à un coefficient près sous la forme $\frac{u'}{u}$ qui s'intègre en $\ln(u)$.

$$I_{10}=\int_0^2\frac{x^2}{2+x^3}dx=\left[\frac{1}{3}\ln\left(2+x^3\right)\right]_0^2=\frac{1}{3}(\ln 10-\ln 2)=\frac{\ln 5}{3}$$

$$I_{11} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$$

$$u(x) = 1 + \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$I_{11} = \int_1^2 \frac{u'(x)}{u(x)} dx$$

La fonction à intégrer est à un coefficient près sous la forme $\frac{u'}{u}$ qui s'intègre en $\ln(u)$.

$$I_{11} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \left[\ln(1+\ln x)\right]_1^2 = \ln(1+\ln 2) - \ln(1+0) = \ln(1+\ln 2)$$

$$I_{12} = \int_2^3 \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x-3} dx$$

$$u(x) = x^2 + x - 3 \Rightarrow u'(x) = 2x+1 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$I_{12} = \int_2^3 \frac{\frac{1}{2}u'(x)}{u(x)} dx$$

La fonction à intégrer est à un coefficient près sous la forme $\frac{u'}{u}$ qui s'intègre en $\ln(u)$.

$$I_{12} = \int_2^3 \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x-3} dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x-3\right)\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln 9 - \ln 3\right) = \frac{\ln 3}{2}$$

$$I_{13} = \int_0^1 \frac{\exp(x)}{(8-3\exp(x))^2} dx$$

$$u(x) = 8 - 3\exp(x) \Rightarrow u'(x) = -3\exp(x)$$

$$I_{13} = \int_0^1 \frac{1}{-3} u'(x)\left[u(x)\right]^{-1-1} dx = \int_0^1 \frac{-1}{-3}(-1)u'(x)\left[u(x)\right]^{-1-1} dx$$

La fonction à intégrer est à un coefficient près sous la forme $\alpha\, u'[u]^{\alpha-1}$ qui s'intègre en $[u]^{\alpha}$.
Ce qui donne

$$I_{13} = \int_0^1 \frac{\exp(x)}{(8-3\exp(x))^2} dx = \left[\frac{\frac{1}{3}}{8-3\exp(x)}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8-3e} - \frac{1}{5}\right) = \frac{e-1}{5(8-3e)}$$

$$I_{14} = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

Aucune méthode usuelle n'est utilisable ici. On fait donc un changement de variable en posant $u = \sqrt{x}$, (dont la différentielle donne $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Leftrightarrow 2udu = dx$)

$$I_{14}=\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int_0^2 \frac{2u}{1+u}du=\int_0^2 \frac{2(1+u)-2}{1+u}du=\int_0^2 2du-2\int_0^2 \frac{1}{1+u}du=\left[2u\right]_0^2-2\left[\ln(1+u)\right]_0^2=4-2\ln 3$$

$$I_{15}=\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$$

$$u(x)=1+x^3 \;\Rightarrow\; u'(x)=3x^2$$

$$I_{15}=\int_0^1 \frac{1}{3}u'(x)\left[u(x)\right]^{\frac{3}{2}-1}dx=\int_0^1 \frac{2}{9}\times\frac{3}{2}u'(x)\left[u(x)\right]^{\frac{3}{2}-1}dx$$

La fonction à intégrer est à un coefficient près sous la forme $\alpha\, u'[u]^{\alpha-1}$ qui s'intègre en $[u]^{\alpha}$.

Ce qui donne

$$I_{15}=\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx=\left[\frac{2}{9}\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{9}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{4\sqrt{2}-2}{9}$$

$$I_{16}=\int_2^3 \ln\left(x^2-1\right)dx$$

On ne peut intégrer directement cette fonction. Il faut passer par une intégration par parties :
en posant

$$\begin{matrix} u'=1 \\ v=\ln\left(x^2-1\right)\end{matrix} \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix} u=x \\ v'=\dfrac{2x}{x^2-1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow I_{16}=\int_2^3 \ln\left(x^2-1\right)dx=\left[x\ln\left(x^2-1\right)\right]_2^3-2\int_2^3 \frac{x^2}{x^2-1}dx$$

$$\Rightarrow I_{16}=\left(3\ln 8-2\ln 3\right)-2\int_2^3 \frac{x^2-1+1}{x^2-1}dx=9\ln 2-2\ln 3-2\int_2^3 1+\frac{1}{x^2-1}dx=9\ln 2-2\ln 3-2\left[x\right]_2^3-2\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx$$

Or $\dfrac{1}{x^2-1}$ est une fraction rationnelle qui se décompose en : $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}-\dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}$

$$I_{16}=\int_2^3 \ln\left(x^2-1\right)dx=9\ln 2-2\ln 3-2-\int_2^3 \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}dx=9\ln 2-2\ln 3-2-\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]_2^3$$

$$I_{16}=9\ln 2-2\ln 3-2-\left(\ln\left(\frac{2}{4}\right)-\ln\frac{1}{3}\right)=-2+10\ln 2-3\ln 3$$

Seconde méthode :

$\ln\left(x^2-1\right)=\ln\left[(x-1)(x+1)\right]=\ln(x-1)+\ln(x+1)$. On peut donc écrire l'intégrale sous la forme :

$$I_{16}=\int_2^3 \ln\left(x^2-1\right)dx=\int_2^3 \ln(x-1)dx+\int_2^3 \ln(x+1)dx$$

On calcule alors chacune des deux intégrales par intégration par parties

---

$$\left.\begin{array}{l} u'=1 \\ v=\ln(x-1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} u=x \\ v'=\dfrac{1}{x-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_2^3 \ln(x-1)dx = \left[x\ln(x-1)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{x}{x-1}dx = \left[x\ln(x-1)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{x-1+1}{x-1}dx$$

$$\Rightarrow \int_2^3 \ln(x-1)dx = \left[x\ln(x-1)\right]_2^3 - \int_2^3 1+\frac{1}{x-1}dx = \left[x\ln(x-1)\right]_2^3 - \left[x+\ln(x-1)\right]_2^3 = 2\ln(2)-1$$

$$\left.\begin{array}{l} u'=1 \\ v=\ln(x+1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} u=x \\ v'=\dfrac{1}{x+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_2^3 \ln(x+1)dx = \left[x\ln(x+1)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{x}{x+1}dx = \left[x\ln(x+1)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{x+1-1}{x+1}dx$$

$$\Rightarrow \int_2^3 \ln(x+1)dx = \left[x\ln(x+1)\right]_2^3 - \int_2^3 1-\frac{1}{x+1}dx = \left[x\ln(x+1)\right]_2^3 - \left[x-\ln(x+1)\right]_2^3 = 8\ln(2)-3\ln(3)-1$$

$$I_{16} = -2+10\ln 2-3\ln 3$$

$$I_{17} = \int_0^1 \frac{x+1}{\exp(x)}dx = \int_0^1 (x+1)\exp(-x)dx$$

On est ici dans le cas d'une fonction sous la forme Polynôme multiplié par une exponentielle. Il faut donc dériver le polynôme lors d'une intégration par parties.

$$\left.\begin{array}{l} u=x+1 \\ v=\exp(-x) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} u'=1 \\ v'=-\exp(-x) \end{array}\right\} \Rightarrow I_{17} = \left[-(x+1)\exp(-x)\right]_0^1 + \int_0^1 \exp(-x)dx$$

$$\Rightarrow I_{17} = 1-2e^{-1} + \left[-\exp(-x)\right]_0^1 = 2-3e^{-1}$$

$$I_{18} = \int_1^2 x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = \int_1^2 x\ln(x)dx - \int_1^2 x\ln(x+1)dx$$

On est dans le cas d'un produit d'une fonction par un polynôme, on va donc faire une intégration par parties en dérivant le logarithme.

$$\left.\begin{array}{l} u'=x \\ v=\ln(x) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} u=\dfrac{1}{2}x^2 \\ v'=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 x\ln(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2)-\frac{3}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} u'=x \\ v=\ln(x+1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} u=\dfrac{1}{2}x^2 \\ v'=\dfrac{1}{x+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 x\ln(x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2-1+1}{x+1}dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 x\ln(x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 (x-1)+\frac{1}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]_1^2 = \frac{3}{2}\ln(3)-\frac{1}{4}$$

On obtient : $I_{18} = 2\ln 2-\dfrac{3}{2}\ln 3-\dfrac{1}{2}$

$$I_{19} = \int_2^1 x(lnx)^2\,dx$$

On va faire ici une intégration par parties en dérivant le logarithme :

$$\begin{matrix} u'=x \\ v=(\ln x)^2 \end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} u=\frac{1}{2}x^2 \\ v'=\frac{2}{x}\ln x \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_{19}=\int_2^1 x(lnx)^2\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2\right]_2^1-\int_2^1 x\ln x dx$$

On effectue alors à nouveau une intégration par parties

$$\begin{matrix} u'=x \\ v=\ln x \end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} u=\frac{1}{2}x^2 \\ v'=\frac{1}{x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_2^1 x\ln x dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_2^1-\frac{1}{2}\int_2^1 xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_2^1-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^1$$

On obtient donc :

$$I_{19}=\int_2^1 x(lnx)^2\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2\right]_2^1-\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_2^1+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^1=\frac{-3}{4}+2\ln 2(1-\ln 2)$$

Seconde méthode :

On effectue un changement de variable : $t=\ln(x)\Leftrightarrow e^t=x\Leftrightarrow e^t dt=dx$

$$I_{19}=\int_2^1 x(lnx)^2\,dx=\int_{\ln 2}^0 e^t * t^2e^t dt=\int_{\ln 2}^0 t^2e^{2t}dt$$

On reconnaît une fonction de la forme Polynôme*exp(u). On va donc intégrer par parties en dérivant le polynôme :

$$\begin{matrix} u=t^2 \\ v'=e^{2t} \end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} u'=2t \\ v=\frac{1}{2}e^{2t} \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_{19}=\left[\frac{1}{2}t^2e^{2t}\right]_{\ln 2}^0-\int_{\ln 2}^0 te^{2t}dt.$$

On effectue alors une seconde intégration par parties

$$\begin{matrix} u=t \\ v'=e^{2t} \end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} u'=1 \\ v=\frac{1}{2}e^{2t} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_{\ln 2}^0 te^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_{\ln 2}^0-\frac{1}{2}\int_{\ln 2}^0 e^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_{\ln 2}^0-\frac{1}{4}\left[e^{2t}\right]_{\ln 2}^0$$

On obtient donc :

$$I_{19}=\left[\frac{1}{2}t^2e^{2t}\right]_{\ln 2}^0-\left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_{\ln 2}^0+\frac{1}{4}\left[e^{2t}\right]_{\ln 2}^0=\frac{-3}{4}+2\ln 2\left(1-\ln 2\right)$$

$$I_{20}=\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

Là encore, on effectue une intégration par parties en dérivant le logarithme.

$$\begin{matrix} u=\ln x \\ v'=\frac{1}{\sqrt{x}} \end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} u'=\frac{1}{x} \\ v=2\sqrt{x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_{20}=\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^4-2\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx=4\ln 4-4\left[\sqrt{x}\right]_1^4=4\ln 4-4\left(2-1\right)=4\left(\ln 4-1\right)$$

Seconde méthode :

On effectue un changement de variable : $t=\ln(x)\Leftrightarrow e^t=x\Leftrightarrow e^t dt=dx$

$$I_{20}=\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{\ln 4}\frac{t}{e^{\frac{1}{2}t}}e^t dt=\int_0^{\ln 4} te^{\frac{1}{2}t}dt$$

On effectue une intégration par parties en dérivant le polynôme.

$$\begin{matrix} u=t \\ v'=e^{\frac{1}{2}t} \end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} u'=1 \\ v=2e^{\frac{1}{2}t} \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_{20}=\left[2te^{\frac{1}{2}t}\right]_0^{\ln 4}-2\int_0^{\ln 4}e^{\frac{1}{2}t}dt=2\ln 4\times\sqrt{4}-4\left[e^{\frac{1}{2}t}\right]_0^{\ln 4}=4\ln 4-8+4=4\left(\ln 4-1\right)$$