Exercice 2 - Fin

D'après le cours, on sait que

$$\forall\ a \leq b,\ P\left(a < X \leq b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right)$$

$$\begin{aligned}
P\left(X > 7\right) &= 1 - P\left(X \leq 7\right) = 1 - F\left(7\right) = 1 - 1 = 0 \\
P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right) &= F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} - \frac{1}{8} = \frac{11}{40} \\
P\left(-\frac{1}{2} < X \leq \frac{8}{9}\right) &= F\left(\frac{8}{9}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0 \\
P\left(X \leq -2\right) &= F\left(-2\right) = 0
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Déterminons (a, b, c) :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{k=-3}^{2} P_X\left(\{k\}\right) = 1 \\ \mathbb{E}\left(X\right) = -\frac{1}{2} \\ \mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{V}\left(X\right) + \left[\mathbb{E}\left(X\right)\right]^2 = \frac{3}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a + b + c = \frac{1}{2} \\ -3a - b + c = -\frac{1}{4} \\ 9a + b + c = \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{32} \\ b = \frac{5}{16} \\ c = \frac{5}{32} \end{array}\right.$$

2. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(3 + 2X\right) &= 3 + 2\mathbb{E}\left(X\right) = 2 \\
\mathbb{E}\left[\left(3 + 2X\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left(9 + 12X + 4X^2\right) = 9 + 12\mathbb{E}\left(X\right) + 4\mathbb{E}\left(X^2\right) \\
&= 9 + 12\mathbb{E}\left(X\right) + 4\left[\mathbb{V}\left(X\right) + \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\right] \\
&= 9
\end{aligned}$$

Première méthode

$$\mathbb{V}\left(aX + b\right) = a^2\mathbb{V}\left(X\right) \Longrightarrow \mathbb{V}\left(3 + 2X\right) = 5$$

Deuxième méthode

$$\mathbb{V}\left(3 + 2X\right) = \mathbb{E}\left[\left(3 + 2X\right)^2\right] - \left[\mathbb{E}\left(3 + 2X\right)\right]^2 = 5$$

Exercice 4

On rappelle que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ ssi elle est définie sur tout $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \tag{1}$$
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \tag{2}$$

1. Montrons que f n'est pas une densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } 0 < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- f est définie sur $\mathbb{R}$
- Etudions à quelle condition (1) est vérifiée.

$$(1) \iff \begin{cases} \forall\ x \leq 0,\ f(x) = 0 \geq 0 \text{ (vérifié)} \\ \forall\ x > 0,\ f(x) = a \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff a \geq 0$$

- Etudions à quelle condition (2) est vérifiée
  Si $a = 0$, f admet une intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} 0\ dx = 0$$

  Si $a > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{+\infty} a\ dx = 0 + [ax]_0^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} ax - a \times 0 = +\infty$$

  Donc, (2) ne peut être vérifiée.

2. Montrons que f n'est pas une densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- f est définie sur tout $\mathbb{R}$
- Etudions à quelle condition (1) est vérifiée

$$\begin{aligned}(1) &\implies f(a) = a^3 \geq 0 \text{ et } f(-a) = -a^3 \geq 0 \\ &\implies a = 0 \\ &\implies \forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\end{aligned}$$

- Etudions à quelle condition (2) est vérifiée
  On montre que f admet une intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} 0\ dx = 0$$

  Donc, (2) ne peut être vérifiée.

3. Montrons que f est une densité ssi $a = \frac{8}{3}$.

$$f(x) = \begin{cases} a\frac{1}{x^3} & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- f est définie sur tout $\mathbb{R}$.
- Etudions à quelle condition (1) est satisfaite

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall\, x \;\notin\;]1,2[\,,\; f(x) \geq 0 \\ \forall\, x \;\in\;]1,2[\,,\; f(x) \geq 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall\, x \;\notin\;]1,2[\,,\; f(x) = 0 \geq 0 \text{ (vérifié)} \\ Min_{x\in]1,2[} f(x) = a\frac{1}{8} \geq 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad a \geq 0
\end{aligned}$$

- Etudions à quelle condition (2) est vérifiée

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{2} f(x)\, dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{1} 0\; dx + \int_{1}^{2} a\frac{1}{x^3}\; dx + \int_{2}^{+\infty} 0\; dx \\
&= 0 + \left[-a\frac{x^{-2}}{2}\right]_1^2 + 0 \\
&= a\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1 \iff a\frac{3}{8} = 1 \iff a = \frac{8}{3}$$

Comme $a = \frac{8}{3} \geq 0$, on en déduit que les conditions (1) et (2) sont satisfaites en même temps et donc f est une densité sur $\mathbb{R}$.

Calculons F la fonction de répartition associée

$$\begin{aligned}
F(b) &= P(X \leq b) \\
&= \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx \\
&= \begin{cases} \int_{-\infty}^{b} 0\; dx & \text{si } b < 1 \\ \int_{-\infty}^{1} 0\; dx + \int_1^b \frac{8}{3}\frac{1}{x^3}\; dx & \text{si } b \;\in [1,2[\\ \int_{-\infty}^{1} 0\; dx + \int_1^2 \frac{8}{3}\frac{1}{x^3}\; dx + \int_2^b 0\; dx & \text{si } b \;\geq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$F(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b < 1 \\ \left[\frac{8}{3}\frac{-x^{-2}}{2}\right]_1^b & \text{si } b \in [1,2[\\ 1 & \text{si } b \geq 2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } b < 1 \\ \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) & \text{si } b \in [1,2[\\ 1 & \text{si } b \geq 2 \end{cases}$$

Calculons $\mathbb{E}(X)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{1} x \times 0\ dx + \int_1^2 \frac{8}{3}\frac{1}{x^2}\ dx + \int_2^{+\infty} x \times 0\ dx \\ &= 0 + \left[-\frac{8}{3}x^{-1}\right]_1^2 + 0 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Calculons $\mathbb{E}\left[X^2\right]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^2\right) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{1} x^2 \times 0\ dx + \int_1^2 \frac{8}{3}\frac{1}{x}\ dx + \int_2^{+\infty} x^2 \times 0\ dx \\ &= 0 + \left[\frac{8}{3}\ln(x)\right]_1^2 + 0 \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) \end{aligned}$$

Calculons $\mathbb{V}(X)$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2 = \frac{24\ln(2) - 16}{9}$$

4. Montrons que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ ssi $a = \frac{1}{4}$

$$f(x) = \begin{cases} ax\exp\left(-\frac{1}{2}x\right) & \text{si } 0 < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$(1) \Longrightarrow a \geq 0$

En utilisant la relation de Chasles puis en intégrant par parties avec

$$u(x) = x \Longrightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \Longrightarrow v(x) = -2\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

On montre que f admet une intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{+\infty} ax\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)dx \\
&= a\int_{0}^{+\infty} x\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)dx \\
&= a\left[-2x\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]_{0}^{+\infty} - a\int_{0}^{+\infty} -2\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)dx \\
&= 0 - 0 + 2a\int_{0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)dx \\
&= 2a\left[-2\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]_{0}^{+\infty} = 2a\left(-0-(-2)\right) = 4a
\end{aligned}$$

Donc (2) $\Longrightarrow a = \frac{1}{4}$

Calculons F la fonction de répartition associée

$$\begin{aligned}
F(b) &= P(X \leq b) \\
F(b) &= \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \\
F(b) &= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{b} 0\ dx & \text{si } b \leq 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{b} \frac{1}{4}x\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)dx & \text{si } b > 0 \end{cases} \\
F(b) &= \begin{cases} 0 & \text{si } b \leq 0 \\ \left[-\frac{1}{2}x\exp\left(-\frac{1}{2}x\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]_{0}^{b} & \text{si } b > 0 \end{cases} \\
F(b) &= \begin{cases} 0 & \text{si } b \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}b + 1\right)\exp\left(-\frac{1}{2}b\right) & \text{si } b > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Calculons $\mathbb{E}(X)$

En utilisant la relation de Chasles puis en intégrant par parties avec

$$\begin{aligned}
u(x) &= x^2 \Longrightarrow u'(x) = 2x \\
v'(x) &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \Longrightarrow v(x) = -2\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\left[-2x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) dx \\
&= 0 - 0 + 4\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \\
&= 4
\end{aligned}$$

Calculons $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ et $\mathbb{V}(X)$

En utilisant la relation de Chasles puis en intégrant par parties avec

$$\begin{aligned}
u(x) &= x^3 \implies u'(x) = 3x^2 \\
v'(x) &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \implies v(x) = -2\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} x^3 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\left[-2x^3 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) dx \\
&= 0 - 0 + \frac{3}{2} \times 4 \times \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx \\
&= 6\mathbb{E}(X) \\
&= 24
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 8$$

Exercice 5

1. Calculons la densité de probabilité f
   On rappelle que la densité est obtenue à partir de F en posant

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{si } F \text{ est dérivable au point x} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- F est dérivable sur $]-\infty, 0[$ avec $\forall\, x \in]-\infty, 0[\,,\ f(x) = F'(x) = 0$
- F est dérivable sur $]0, 1[$ avec $\forall\, x \in]0, 1[\,,\ f(x) = F'(x) = a + b\ln(x)$

- F est dérivable sur $]1,+\infty[$ avec $\forall\ x \in]1,+\infty[\,,\ f(x) = F'(x) = 0$
- Aux points $x = 0$ et $x = 1$, F pourrait ne pas être dérivable, on pose

$$f(0) = f(1) = 0$$

On obtient donc

$$f(x) = \begin{cases} a + b\ln(x) & \text{si } x \ \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Calculons a et b si $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^1 ax + bx\ln(x)\,dx \\ &= \int_0^1 a\ x\ dx + b\int_0^1 x\ln(x)\,dx \\ &= \left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^1 + b\int_0^1 x\ln(x)\,dx \\ &= \frac{a}{2} + b\underbrace{\int_0^1 x\ln(x)\,dx}_{=I} \end{aligned}$$

Pour calculer I, on intégre par parties avec

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x) \implies u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) &= x \implies v(x) = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx \\ &= 0 - \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2}\ln(x) - \int_0^1 \frac{x}{2}dx \\ &= 0 - 0 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{2} - \frac{b}{4}$$

or, par hypothèse, $a - b = 1$ et $b \ \in\ [-1,0]$.

Si on suppose que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$, on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{a}{2} - \frac{b}{4} = \frac{1}{2} \\ a - b = 1 \\ b \ \in\ [-1,0] \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \\ b \ \in\ [-1,0] \ \text{vrai} \end{cases}$$