

TD Rappels de probabilités

Exercice 1

Soit X la variable discrète à valeurs dans $\mathcal{D}_X = \{0, \dots, 5\}$ dont la loi est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) &= \frac{6}{36}, & \mathbb{P}(X = 1) &= \frac{10}{36}, & \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{8}{36}, \\ \mathbb{P}(X = 3) &= \frac{6}{36}, & \mathbb{P}(X = 4) &= \frac{4}{36}, & \mathbb{P}(X = 5) &= \frac{2}{36}.\end{aligned}$$

1. Calculer la fonction de répartition de X
2. Calculer son espérance.
3. Calculer sa variance.

Exercice 2

La fonction de répartition de la variable aléatoire discrète X est donnée par

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < -1 \\ \frac{1}{8} & -1 \leq b < 1 \\ \frac{2}{5} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{4}{7} & 2 \leq b < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \leq b < 6 \\ 1 & b \geq 6 \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{P}(X > 7)$, $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2})$, $\mathbb{P}(-\frac{1}{2} < X \leq \frac{8}{9})$ et $\mathbb{P}(X \leq -2)$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_X &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \\ \mathbb{P}(X = -3) &= a, & \mathbb{P}(X = -2) &= \frac{5}{32}, & \mathbb{P}(X = -1) &= b, \\ \mathbb{P}(X = 0) &= \frac{5}{16}, & \mathbb{P}(X = 1) &= c, & \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{1}{32}.\end{aligned}$$

On sait que $\mathbb{E}(X) = -\frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{5}{4}$

1. Déterminer a , b et c
2. Calculer $\mathbb{E}[3 + 2X]$, $\mathbb{E}[(3 + 2X)^2]$ et, de deux manières différentes, $\mathbb{V}(3 + 2X)$

Exercice 4

Soit a un réel. On considère les applications suivantes

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } 0 < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} a \frac{1}{x^3} & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour chacune d'entre elles :

1. Trouver, si c'est possible, des conditions nécessaires et suffisantes sur a pour que f soit la densité de probabilité d'une var continue X .
2. Dans le cas où f est une densité de probabilité, calculer la fonction de répartition F
3. Dans le cas où f est une densité de probabilité, calculer $\mathbb{E}(X)$
4. Dans le cas où f est une densité de probabilité, calculer $\mathbb{V}(X)$ (sauf cas 3)

Exercice 5

Soient a et b deux réels avec $a - b = 1$ et $b \in [-1, 0]$ et F la fonction de répartition d'une var X continue définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ ax + bx(\ln(x) - 1) & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer la densité de probabilité de X
2. Calculer a et b si $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$