Exercice

Le but de ce qui suit est de montrer que le nombre e n'est pas rationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme quotient de deux entiers (un peu comme $\sqrt{2}, \pi, \ldots$).

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. On appelle factorielle n et on note $n!$ le nombre

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

On pose par convention $0! = 1$.

1. Quel est selon vous l'intérêt de cette convention ?
2. On pose
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$
et $v_n = u_n + 1/(n!)$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers un même réel ℓ.
3. Montrer que u_{11} réalise une valeur approchée de ℓ à 10^{-7}. Le calculer (valeur exacte sous forme de fraction, puis valeur approchée à 10^{-7}).

   On admettra pour la suite que le réel ℓ est le nombre d'Euler e = exp(1).
4. a) Vérifier que pour tout entier naturel q, le nombre $q! \times u_q$ est entier.

   b) Montrer l'encadrement
$$q! \times u_q < q! \times e < q! \times u_q + 1$$

   c) On veut montrer le caractère irrationnel de e. Pour cela, on va raisonner par l'absurde. On suppose donc qu'on a l'écriture sous forme de fraction (irréductible) $e = p/q$, avec p, q entiers, et vous devez en déduire une contradiction et conclure.