Algèbre linéaire

Rappels de logique formelle : Une *proposition* est un énoncé mathématique qui peut être soit vrai, soit faux. Si P, Q sont deux propositions

- *non* P est vraie ssi P est fausse.
- (P *ou* Q) est vraie ssi au moins l'une des deux propositions P et Q est vraie.
  $\rightsquigarrow$ *non*(P *ou* Q) $\iff$ (*non* P) *et* (*non* Q).
- (P *et* Q) est vraie ssi les propositions P et Q sont toutes deux vraies.
  $\rightsquigarrow$ *non*(P *et* Q) $\iff$ (*non* P) *ou* (*non* Q).
- ($P \Rightarrow Q$) est équivalente à (*non*P) *ou* Q.
  $\rightsquigarrow$ *non*($P \Rightarrow Q$) $\iff$ P *et* (*non* Q).
  ⚠ En particulier, si P est fausse, $P \Rightarrow Q$ est automatiquement vraie.

Méthodes :

- Pour montrer que ($P \Rightarrow Q$) est vraie, on suppose que P est vraie, et on en déduit Q.
- Pour montrer que ($P \Rightarrow Q$) est fausse, on montre, d'une part que P est vraie, et d'autre part que Q est fausse.
- Pour montrer que (P **et** Q) est vraie, on montre séparément que P et Q sont vraies.
- Pour montrer que (P **ou** Q) est vraie, on peut utiliser (P *ou* Q) $\iff$ (*non* $P \Rightarrow Q$) : on suppose que P est fausse et on en déduit Q.
  $\rightsquigarrow$ On peut aussi montrer (Q *ou* P) via (*non* $Q \Rightarrow P$).

Prédicats et quantificateurs : Un *prédicat* sur un ensemble A est une expression qui à chaque $x \in A$ associe une proposition $P(x)$.

- "$\forall x \in A,\ P(x)$" est une proposition qui est vraie ssi quel que soit $x \in A$, $P(x)$ est vraie.
- "$\exists x \in A,\ P(x)$" est une proposition qui est vraie si on peut trouver au moins un $x_0 \in A$ t.q. $P(x_0)$ soit vraie.
- *non*$(\forall x \in A,\ P(x)) \iff \exists x \in A,$ *non*$(P(x))$.
- *non*$(\exists x \in A,\ P(x)) \iff \forall x \in A,$ *non*$(P(x))$.

Méthodes - Rédaction : Pour montrer...

- *que "$\forall x \in A,\ P(x)$" est vraie :* On écrit "Soit $x \in A$, montrons que $P(x)$". On est alors ramené à montrer la proposition $P(x)$.
- *que "$\exists x \in A,\ P(x)$" est vraie :* On cherche un $x_0 \in A$ spécifique qui marche, puis on rédige :
  "Posons $x = x_0$. Vérifions que $P(x_0)$".
- *que "$\forall x \in A,\ P(x)$ est fausse" :* On cherche un *contre-exemple :* un $x_0 \in A$ spécifique tel que $P(x_0)$ soit fausse, et on rédige :
  "Posons $x = x_0$. Vérifions que *non*$(P(x_0))$"
- *que " $\exists x \in A,\ P(x)$" est fausse :* Il s'agit de montrer que $\forall x \in A,$ *non*$(P(x))$.
- *qu'il y a un unique x tel que* $P(x)$: On commence par montrer qu'il en existe un.
  Puis on montre que c'est le seul : "Soient $x, y \in A$. Supposons $P(x)$ et $P(y)$. Montrons que $x = y$."

Raisonnements classiques :

- *Par contraposée :* Pour montrer une implication $P \Rightarrow Q$, on montre la proposition équivalente *non* $Q \Rightarrow$ *non* P.
- *Par l'absurde :* Pour montrer que P est vraie, on suppose que P est fausse et on en déduit une contradiction.
  $\rightsquigarrow$ Dans le cas où P est une implication $Q_1 \Rightarrow Q_2$, on suppose donc que Q_1 est vraie et Q_2 est fausse, et on cherche une contradiction entre les deux.
- *Par double implication :* Pour montrer une équivalence $P \iff Q$, on montre successivement $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.
- *Par récurrence :* Pour montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$, où $P(n)$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$:
  - *Initialisation :* On montre que $P(0)$ est vraie.
  - *Hérédité :* On montre, pour $n \in \mathbb{N}$, que l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.
    $\rightsquigarrow$ On écrit : "Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$."
- *Par disjonction des cas :* Pour montrer "$\forall x \in E,\ P(x)$", on peut écrire $E = E_1 \cup ... \cup E_k$, et montrer séparément "$\forall x \in E_1, P(x)$",...,"$\forall x \in E_k,\ P(x)$".
- *Par analyse-synthèse :* Pour trouver les $x \in A$ t.q. $P(x)$:
  - *Analyse :* "Soit $x \in A$. Supposons que $P(x)$", puis on trouve des conditions qui permettent de déterminer x.
  - *Synthèse :* "Posons $x = ...$ (ce qu'on a trouvé à l'étape Analyse). Vérifions que $x \in A$ et $P(x)$."

Rappels sur les ensembles : Un ensemble E est caractérisé par la liste de ses éléments : soit une liste ($E = \{x_1, \ldots, x_p\}$), soit un prédicat ($E = \{x \in A,\ P(x)\}$)

- *Appartenance :* On note $x \in E$ pour indiquer que l'élément x appartient à l'ensemble E, $x \notin E$ dans le cas contraire.
  ⚠ Les éléments d'un ensemble peuvent être des nombres, mais aussi des fonctions, des matrices, d'autres ensembles...
- *Ensemble vide :* On note $\emptyset$ l'ensemble vide, qui ne contient aucun élément : quel que soit x, $x \notin \emptyset$.
- *Inclusion :* Pour deux ensembles E, F, on note $E \subset F$ si E est inclus dans F, c'est-à-dire

$$\boxed{E \subset F \iff \forall x, (\ x \in E \Rightarrow x \in F)}$$

  $\rightsquigarrow$ Si $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$.

Méthodes :

- *Pour montrer que $E \not\subset F$:* On veut montrer *non*$(\forall x, (\ x \in E \Rightarrow x \in\ F))$ c'est à dire

$$\boxed{\exists x, (x \in E \text{ et } x \notin\ F}) :$$

  il s'agit de trouver un élément de E qui n'est pas dans F.
- *Pour montrer qu'un ensemble est vide :* On peut procéder par l'absurde : on suppose qu'il existe $x \in E$ et on montre que cela donne une contradiction.
- *Pour montrer que deux ensembles sont égaux :*
  - On peut montrer $x \in E \Leftrightarrow x \in F$
    ⚠ il faut être sûr de garder l'équivalence à chaque étape du raisonnement !
  - On peut procéder par double inclusion, c'est à dire montrer $E \subset F$ et $F \subset E$.

Définition : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide E muni de deux lois

1. une addition interne $+ : E \times E \to E$ qui vérifie
   - (A_1) $\forall (u, v, w) \in E^3,\ u + (v + w) = (u + v) + w$.
   - (A_2) il existe $0_E \in E$ t.q. $\forall u \in E,\ u + 0_E = u$. On appelle 0_E le *vecteur nul* de E.
   - (A_3) pour chaque $u \in E$ il existe un $(-u) \in E$ tel que $u + (-u) = 0_E$. On appelle $(-u)$ *l'opposé* de u.
   - (A_4) $\forall (u, v) \in E^2,\ u + v = v + u$.
2. une multiplication externe $\cdot : E \times \mathbb{K} \to E$ qui vérifie
   - (M_1) $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$.
   - (M_2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall u \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$.
   - (M_3) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall u \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
   - (M_4) $\forall (u, v) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v$.

Les éléments de E sont appelées les *vecteurs*, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

Soient $u_1, \ldots, u_p, v$ des vecteurs de E. On dit que v est *combinaison linéaire* de $u_1, \ldots, u_p$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$.

Propriétés : Pour tous $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

1. $\lambda \cdot u = 0_E \iff (\lambda = 0$ ou $u = 0_E)$
2. $(-1) \cdot u = -u$ (l'opposé de u)
3. Notons $u - v = u + (-v)$. Alors $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$.

Exemples fondamentaux :

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel.
2. Pour tout n, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est $(0, \ldots, 0)$.
3. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme constant égal à 0.
4. Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de tailles $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice $n \times p$ à coefficients tous nuls.
5. Soit X un ensemble quelconque. Alors l'ensemble $\mathbb{K}^X$ des fonctions $X \to \mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbb{K}^X$ est la fonction constante nulle. En particulier, l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'un sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si

1. $F \neq \emptyset$.
2. Pour tous $(u, v) \in F^2$, $u + v \in F$.
3. Pour tout $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in F$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est un s.e.v. de E
2. $F \subset E$ et F muni des même lois que E est un espace vectoriel
3. $F \neq \emptyset$ et pour tous $(u, v) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda u + \mu v \in F$.

Propriétés : Soit F un s.e.v. de E. On a

- $0_E \in F$.
- Soient $u_1, \ldots, u_p \in$. Si v est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$, alors $v \in F$.

Méthode : Pour vérifier si un sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel :

1. On regarde si $0_E \in F$. Si oui, on a bien $F \neq \emptyset$. Sinon, F n'est pas un sous-espace vectoriel.
2. On prend $u, v \in F$ quelconques et on vérifie que $u + v \in F$.
3. On prend $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et on vérifie que $\lambda u \in F$.

Remarque : On peut faire 2. et 3. d'un coup : on montre que pour tous $(u, v) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a $\lambda u + \mu v \in F$.

Méthode 2 : Pour montrer que $F \subset E$ n'est *pas* un s.e.v. de E, on peut :

1. Montrer que $0_E \notin F$
2. Trouver u, v dans F tels que $u + v \notin F$
3. Trouver $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda u \notin F$. Penser à essayer $\lambda < 0$.

Construction de s.e.v. : Soient F, G deux s.e.v. de E.

1. $F \cap G$ est un s.e.v. de E.
2. ⚠ $F \cup G$ n'est *pas* un s.e.v. de E, sauf si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
3. $F + G = \{w \in E, w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G\}$ est un s.e.v. de E appelé *somme* de F et G. C'est le plus petit s.e.v. qui contient $F \cup G$.
4. Si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que E est *somme directe* de F et G et on note $E = F \oplus G$.

Méthodes pour montrer que $E = F \oplus G$

1. *Avec la définition :*
   - On montre que $x \in F \cap G \Rightarrow x = 0_E$
   - On prend $u \in E$ quelconque et on trouve $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$ (par ex. par analyse-synthèse).
2. *Avec des bases :* (Seulement si $\dim E < \infty$) On détermine une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G, et on montre que $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E.
3. *Avec les dimensions :* (Seulement si $\dim E < \infty$)
   - On montre que $F \cap G = \{0_E\}$
   - On montre que $\dim F + \dim G = \dim E$.

S.e.v engendré : Soit $A \subset E$. On note

$$\mathrm{Vect}(A) = \{x \in E, \exists (u_1, \ldots, u_p) \in A^p, (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum \lambda_i u_i\}$$

l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A.

$\rightsquigarrow$ C'est un s.e.v. de E, appelé *sous-espace engendré* par A. C'est le plus petit s.e.v. qui contient A.

Si $A = \{u_1, \ldots, u_p\}$ est fini, on note $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

Propriétés :

- Si $A \subset B$ alors $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.
- Si F est un s.e.v. et $A \subset F$ alors $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.
- $A \subset \mathrm{Vect}(A)$.