Bases et dimension

S.e.v engendré par une famille finie : Soient $u_1, \dots, u_p \in E$. On note

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \{x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, x = \sum \lambda_i u_i\}$$

l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des $u_1, \dots, u_p$.
$\rightsquigarrow$ C'est le plus petit s.e.v. de E qui contient tous les u_i.

Ajouter et enlever un vecteur :
- Si u_p est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_{p-1}$ alors $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$.
- Si $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$, et $\lambda_p \neq 0$, alors $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, v)$.

Familles libres, génératrices : Soit E un $\mathbb{K}$−e.v., et $\mathcal{F} = \{u_1, \dots, u_k\} \subset E$.

1. La famille $\mathcal{F}$ est *libre* si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, k}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{F}$ libre ssi $\forall i_0, u_{i_0} \notin \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{i_0-1}, u_{i_0+1} \dots, u_p)$

2. La famille $\mathcal{F}$ est *génératrice* si tout vecteur de E est combinaison linéaire des u_i :

$$\boxed{\forall\, x \in E, \exists \lambda_1 \dots, \lambda_k \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{F}$ est génératrice ssi $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Propriétés : Si $\mathcal{F}$ est génératrice :
- Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ alors $\mathcal{A}$ est aussi génératrice.
- Si $u_{i_0} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F} \setminus \{u_{i_0}\})$, alors $\mathcal{F} \setminus \{u_{i_0}\}$ est génératrice.

Si $\mathcal{F}$ est libre :
- Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ alors $\mathcal{A}$ est aussi libre.
- Si $v \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est libre.

Méthodes : Pour vérifier si une famille $\{u_1, \dots, u_k\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est...
- *libre :* On suppose que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ceci donne un système linéaire homogène d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, que l'on résoud.
  - si $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ est la seule solution, la famille est libre.
  - Sinon, la famille n'est pas libre, et les solutions non nulles permettent d'exprimer certains des (u_i) comme combinaison linéaire des autres.
- *génératrice :* On pose $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$.
  $\rightsquigarrow$ Ceci donne un système linéaire d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ et de second membre $(x_1, \dots, x_n)$.
  - S'il y a au moins une solution, la famille est génératrice, et on a trouvé l'expression des λ_i en fonction des x_i.
  - Sinon, le système n'a pas de solution : dans ce cas, la famille n'est pas génératrice.
    De plus, le système comporte alors des lignes du type $0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, qui donnent des équations de l'espace vectoriel engendré par les (u_i).

Bases : Une *base* de E est une famille à la fois libre et génératrice.
$\rightsquigarrow$ Donc $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E ssi, pour chaque $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum \lambda_i u_i$. On appelle ce n-uplet *coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments ; on appelle ce nombre *dimension* de E.
Sur un espace vectoriel de dimension n, on a plus précisément :
- les familles libres ont *au plus* n éléments
- les familles génératrices ont *au moins* n éléments
- les bases ont *exactement* n éléments.

Méthodes : Pour vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de E, on peut :
- Montrer que c'est une famille libre et génératrice
- Si on sait que $\dim E = n$, on peut montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre à n vecteurs
- Si on sait que $\dim E = n$, on peut montrer que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice à n vecteurs

Pour obtenir une base à partir d'une famille de vecteurs donnée, on dispose du *théorème de la base incomplète :*
- Toute famille libre $(u_1, \dots, u_k)$ peut être complétée en une base : par exemple, en ajoutant des éléments de la base canonique qui ne sont pas dans $\mathrm{Vect}(u_i, \dots, u_k)$.
- De toute famille génératrice $(u_1, \dots, u_m)$, on peut extraire une base, en enlevant les vecteurs qui peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Sous-espaces vectoriels et dimension : Si E est de dimension finie et $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, alors
- $\dim\, F \leq \dim\, E$;
- Si $\dim\, F = \dim\, E$, alors $F = E$.
- ⚠ Par convention, $\dim\{0_E\} = 0$.

Somme et dimension : Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\boxed{\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

En particulier, si $E = F \oplus G$, $\dim E = \dim F + \dim G$.
De plus, dans ce cas, l'union de toute base de F avec toute base de G donne une base de E.

Applications linéaire et dimension : Soient E, F e.v. de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle *rang* de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Le *théorème du rang* stipule alors que

$$\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)}$$

En particulier,
- f est injective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim E$
- f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim F$
- Si $\dim E = \dim F$: f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

La méthode du pivot de Gauss : Pour résoudre un système linéaire de n équations à p inconnues :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

on va le ramener à un système plus facile à résoudre, en lui appliquant les *opérations élémentaires* suivantes :

- l'échange de deux lignes : $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$
- la multiplication d'une ligne par un réel *non nul* α : $\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i}$
- l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre : $\boxed{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$

$\rightsquigarrow$ On va utiliser un coefficient non nul devant une inconnue x_i pour se "débarrasser" de x_i dans les lignes en dessous. On élimine ainsi de plus en plus de variables, pour se ramener à un *système échelonné.*

Systèmes échelonnés : On appelle *système échelonné* un système tel que le nombre de coefficients nuls au début de chaque ligne est strictement croissant. Il est donc de la forme

$$(SE)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + & + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + & + a_{2p}x_p & = b_2 \\ & & \vdots \\ & a_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a_{rp}x_p & = b_r \\ & 0 & = b_{r+1} \\ & & \vdots \\ & 0 & = b_n \end{cases}$$

- Le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé *pivot.*
- On appelle *rang* du système, noté r, le nombre de pivots.
- On appelle *inconnues principales* les inconnues $x_1, x_{j_2} \dots x_{j_r}$ qui correspondent à un pivot et *inconnues libres* les autres inconnues.
  $\rightsquigarrow$ $\boxed{r \leq n}$ $\boxed{r \leq p}$ $\boxed{p = r + \text{ nb d'inconnues libres}}$

$\rightsquigarrow$ Les sytèmes échelonnés sont faciles à résoudre !

Résolution d'un système échelonné :

- Si l'un des $b_{r+1}, \dots, b_n$ est non nul, **le système n'a pas de solution**. Ce cas ne se produit que si $r < n$.
- Sinon, $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$, et, en ôtant les lignes $0 = 0$, notre système échelonné est équivalent à

$$(SE')\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + & + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + & + a_{2p}x_p & = b_2 \\ & & \vdots \\ & a_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a_{rp}x_p & = b_r \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Deux cas se présentent alors :

- si $r = p$, le système est triangulaire :

$$(SE')\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + & + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + & + a_{2p}x_p & = b_2 \\ & & \vdots \\ & a_{rr}x_r & = b_r \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ **unique solution**, qu'on obtient "en remontant".

- si $r < p$, les inconnues $(x_{j_{r+1}}, \dots, x_p)$ sont libres.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j_r}x_{j_r} & = b_1 - a_{1j_{r+1}}x_{j_r+1} - \dots - a_{1p}x_p \\ a_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + a_{2j_r}x_{j_r} & = b_2 - a_{2j_{r+1}}x_{j_r+1} - \dots - a_{2p}x_p \\ & \vdots \\ a_{rj_r}x_{j_r} & = b_r - a_{rj_{r+1}}x_{j_r+1} - \dots - a_{rp}x_p \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ **une infinité de solutions**, une pour chaque $(p-r)$-uplet $(x_{j_{r+1}}, \dots, x_p)$.

Exemple : Considérons le système

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 3 \\ x & - & 4y & + & 3z & = & 2 \end{cases}$$

On utilise le coefficient 1 devant x dans L_1 comme pivot pour éliminer les x sur les lignes suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & 1 \\ & - & 5y & + & 4z & = & 1 \end{cases}$$

On utilise le coefficient 1 devant y dans L_2 comme pivot pour éliminer les y sur la dernière ligne : $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & 1 \\ & & & - & 6z & = & 6 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Le système est maintenant échelonné !

Il n'y a pas d'inconnue libre, ni de ligne contradictoire : le système admet une unique solution qu'on trouve en remontant :

$$\begin{aligned} & z = -1 \\ & y = 1 + 2z = -1 \\ & x = 1 - y + z = 1 \\ \rightsquigarrow \quad & \mathcal{S} = \{(1, -1, -1)\} \end{aligned}$$

Systèmes homogènes : Si le second membre est nul ($b_1 = \cdots = b_n = 0$), on dit que le système est *homogène.*

Un système homogène admet toujours au moins la solutions nulle $x_1 = \cdots = x_p = 0$. Il n'y a donc que deux cas possibles :

- soit $r = p$, et la $(0, \dots, 0)$ est la seule solution ;
- soit $r < p$, et il y a alors, en plus de $(0, \dots, 0)$, une infinité de solutions non nulles.

En particulier, un système homogène qui a plus d'inconnues que d'équations a toujours une infinité de solutions.