

Applications linéaires et représentations matricielles

Applications linéaires : Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, et $f : E \rightarrow F$ une application.

- On dit que f est *linéaire* si pour tous $u, v \in E$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

- L'ensemble des applications linéaires $E \rightarrow F$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
- Une application linéaire $f : E \rightarrow E$ est un *endomorphisme* de E . On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes.
- Une application linéaire bijective est un *isomorphisme*.

Toute combinaison linéaire d'applications linéaires donne une application linéaire.

Autrement dit, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

Image et noyau : Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- On appelle *image* de f , noté $\text{Im}(f)$, l'espace vectoriel

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{v \in F, \exists u \in E \text{ tq } v = f(u)\} \subset F$$

Si F est de dim finie, $\dim \text{Im}(f)$ est appelée *rang* de f , noté $\text{rg}(f)$.

- On appelle *noyau* de f , noté $\text{Ker}(f)$, l'espace vectoriel

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E, f(u) = 0_F\} \subset E$$

Propriétés : On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Théorème du rang : $\boxed{\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \text{rg}(f)}$
- f est injective ssi $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ ssi $\text{rg}(f) = \dim E$.
- f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$ ssi $\text{rg}(f) = \dim F$.
- Si $\dim F = \dim E$, alors f est surjective ssi f est injective ssi f est bijective.

Matrice d'une application linéaire : On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F . A $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on peut associer $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie comme suit :

- Pour $j = 1, \dots, n$, on calcule $f(e_j) \in F$.
- On écrit les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base \mathcal{B}_F : $f(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} f_i$.
- Alors la j -ème colonne de la matrice A est le vecteur-colonne $[f(e_j)]_{\mathcal{B}_F} = {}^t (a_{1j} \dots a_{pj})$, donc

$$A = \begin{pmatrix} [f(e_1)]_{\mathcal{B}_F} & \dots & [f(e_n)]_{\mathcal{B}_F} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Propriétés : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, G)$ représentées par les matrices A et B dans des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$. Alors $g \circ f$ est représentée par BA .

De plus, f est un isomorphisme ssi sa matrice est inversible.

Changement de base : Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de E , et f un endomorphisme. La *matrice de passage* P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est la matrice dont la j -ème colonne est le vecteur-colonne des coordonnées du j -ème vecteur de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .

Remarque : P est donc la matrice de l'application id_E dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

Soit alors $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme; notons A la matrice de f dans la base \mathcal{B} et B la matrice de f dans la base \mathcal{B}' . Alors

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Application : Base de diagonalisation Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Supposons que f soit diagonalisable : il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de f . Pour tout $i = 1, \dots, n$, on a donc $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

Les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base (e_1, \dots, e_n) sont donc $(0, \dots, 0, \lambda_i, \dots, 0)$, avec λ_i en i -ème position. Donc la matrice D de f dans la base \mathcal{B} est

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Et alors ? La matrice A de l'endomorphisme f est donc beaucoup plus "simple" dans la base \mathcal{B} que dans la base canonique. C'est particulièrement utile pour calculer les puissances successives de A . Soit P la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} , alors $A = PDP^{-1}$. Pour $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}_{p \text{ fois}} = PD^p P^{-1},$$

et $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$ est très simple à calculer.

Matrice, image et noyau :

- Si A est la matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$, alors $v \in \text{Ker}(f)$ ssi

$$A[v]_{\mathcal{B}_E} = 0,$$

où $[v]_{\mathcal{B}_E}$ est le vecteur des coordonnées de v dans la base \mathcal{B}_E . En notant ces coordonnées (x_1, \dots, x_n) , on se ramène donc à un système linéaire homogène.

- $v \in \text{Im}(f)$ si, et seulement si, il existe $[x]_{\mathcal{B}_E} = (x_1, \dots, x_n)$ tels que $A[x]_{\mathcal{B}_E} = [v]_{\mathcal{B}_F}$.
 \rightsquigarrow On se ramène, là aussi, à un système linéaire d'inconnues x_1, \dots, x_n .
 - Si $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$, alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
 \rightsquigarrow Les colonnes de A donnent les coordonnées d'une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ dans la base \mathcal{B}_F .
- ▲** Ce n'est pas forcément une famille libre!

Rappel : Produits de matrices : On peut multiplier une matrice de taille $n \times p$ par une matrice de taille $p \times q$:

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

$$AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

↪ On obtient une matrice de taille $n \times q$.

▲ Généralement $AB \neq BA$.

▲ $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.

▲ $AB = 0_{n,q} \not\Rightarrow A = 0_{n,p}$ ou $B = 0_{p,q}$.

Puissance d'une matrice carrée : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit A^p par récurrence : $A^0 = I_n, A^{k+1} = AA^k$

Une matrice A est **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_{n,n}$.

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **commutent**, i.e. $AB = BA$, alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Méthodes : Pour calculer A^n , on peut :

- Calculer les premières puissances, conjecturer le résultat puis le démontrer par récurrence.
- Ecrire $A = M + N$, où M, N sont deux matrices qui commutent et dont les puissances sont simples à calculer (par exemple, nilpotentes ou diagonales), puis appliquer la formule du binôme.
- Trouver une matrice inversible P t.q. $P^{-1}AP$ est diagonale.

Inverse : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* s'il existe une matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

A^{-1} est l'**inverse** de A .

Méthode : Pour prouver qu'une matrice est inversible et trouver son inverse, on peut

- Utiliser la méthode du pivot de Gauss : on applique une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme $A|I_n$ en $I_n|B$. On a alors $B = A^{-1}$
- Trouver un polynôme P avec un terme constant non nul tel que $P(A) = 0_n$. On peut alors écrire

$$a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0 \iff -\frac{1}{a_0} (a_n A^{n-1} + \dots + a_1 I_n) A = I_n$$

$$\text{donc } A^{-1} = -\frac{1}{a_0} (a_n A^{n-1} + \dots + a_1 I_n).$$

- Interpréter A comme la matrice d'une application linéaire et prouver que cette application linéaire est inversible (par exemple, en calculant son noyau).

Transposée : La **transposée** de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée ${}^t A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, est définie par $({}^t A)_{ij} = a_{ji}$.

↪ les lignes de ${}^t A$ sont les colonnes de A et vice-versa.

Propriétés :

- ${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B, {}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$
- ${}^t({}^t A) = A, {}^t(AB) = {}^t B {}^t A, ({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Définition :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *symétrique* si ${}^t A = A$.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *antisymétrique* si ${}^t A = -A$

Trace : La **trace** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme des coefficients diagonaux de A : $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Propriétés :

- $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B), \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A)$
- $\text{Tr}({}^t A) = \text{Tr}(A)$.
- $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Déterminants :

$$\bullet \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

- Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on se ramène à des déterminants plus petits en développant le long d'une ligne ou d'une colonne.

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A .

- La formule de développement par rapport à la i -ème ligne $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ est alors :

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

- La formule de développement par rapport à la j -ème colonne est :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Stratégie : il s'agit donc de développer par rapport à la ligne/colonne qui a le plus de zéros !

Opérations élémentaires et déterminant : Si on obtient \tilde{A} à partir de A par :

- $L_i \leftrightarrow L_j$, ou $C_i \leftrightarrow C_j$ alors $\det \tilde{A} = -\det A$
- $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, ou $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ alors $\det \tilde{A} = \det A$
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$, ou $C_i \leftarrow \alpha C_i$ alors $\det \tilde{A} = \alpha \det A$

Stratégie : on utilise les opérations sur les lignes et les colonnes (notamment la deuxième) pour faire apparaître le plus de zéros possibles sur une ligne ou une colonne donnée, et on développe par rapport à celle-ci.

Propriétés du déterminant

- Soit $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$. On note $\det(v_1, \dots, v_n)$ le déterminant de la matrice dont la j -ième colonne est v_j . Alors $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ ssi (v_1, \dots, v_n) est une base.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

Autres propriétés : Le déterminant vérifie :

- *Multi-linéarité :* Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes, et chacune des colonnes :
- $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA)$.
↪ Si P est inversible, $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$
- $\det(I_n) = 1$. Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det({}^t A) = \det A$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

Cas des matrices triangulaires :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$