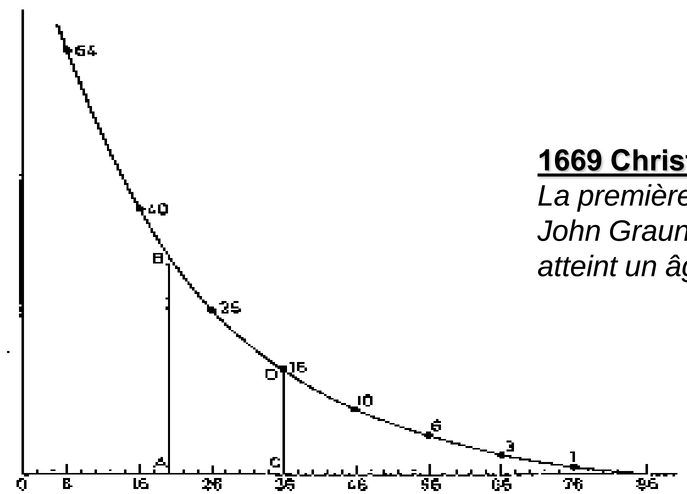
Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,

Institut de démographie

Cours d'analyse démographique par Alexandre Avdeev, niveau : **Master 1e année et Diplôme générale de démographie**

Chapitre 5 : Analyse de durée : tables démographiques, tables de mortalité

1. Événements et états démographiques
2. Éléments clés des tables démographiques
3. Durée de vie, durée d'un état
4. Comparaison des tables : décomposition des changements de l'espérance de vie



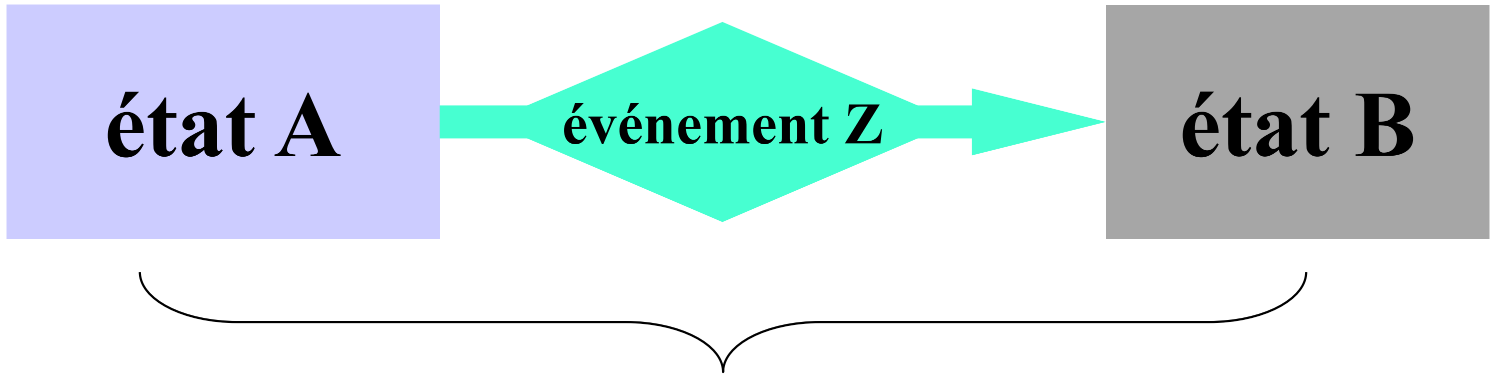
1669 Christiaan Huygens (1629-1695), Netherlands

La première représentation graphique de la fonction de distribution continue: la table de mortalité de John Graunt avec la démonstration comment peut-on trouver la durée médiane de vie après avoir atteint un âge donné

Principes d'analyse de survie et l'idée de la table de mortalité

Considérations sur les événements et les états en démographie : concept de transition

Cas général :



Transition de l'état A vers l'état B
conditionnée par un événement Z

Tables démographiques présentent la probabilité de passer d'un état à l'autre sous la condition d'un événement (le plus souvent c'est l'âge ou la durée de l'état initial).

Analyse de mortalité dans le cadre d'un concept de transition

état A :
« vivant à l'âge X ans révolu »

événement Z :
« décès à l'âge x ans révolu »

état B :
« mort à l'âge X ans révolu »

$$X = 0; 1; 2; \ldots; \omega$$

A est ***un état transitoire :*** puisque l'individu peut passer de cet état à un autre état

Z est ***un événement***
- ***possible*** mais non obligatoire pour l'âge X donné ;
- ***fatal*** : puisque « tous sont mortels » ;
- ***non renouvelable*** : qui ne survient qu'une fois.

B est ***un état absorbant***: puisque l'individu ne peut pas passer de cet état à un autre état

On peut donc s'intéresser à obtenir la série des probabilités de passer d'un état à l'autre associées à chaque âge $\boldsymbol{x = 0\,;1\,;2\,;..,\ \omega - 1\,;\ \omega} \rightarrow$

de mourir « $\boldsymbol{d_x}$ », telle que $\sum_{x=0}^{\omega} d_x = 1$ de survivre « $\boldsymbol{S_x}$ », telle que $S_x = 1 - d_{x-1}$

« $\boldsymbol{d_x}$ » et « $\boldsymbol{S_x}$ » - sont *des variables clés* de la table de mortalité, ou d'un modèle de survie (décès de table et la survie).

Modèle d'analyse de survie d'une génération

(l'observation suivie, la migration absente)

Soit

x – un âge exact (à l'anniversaire cf. diagramme de Lexis)

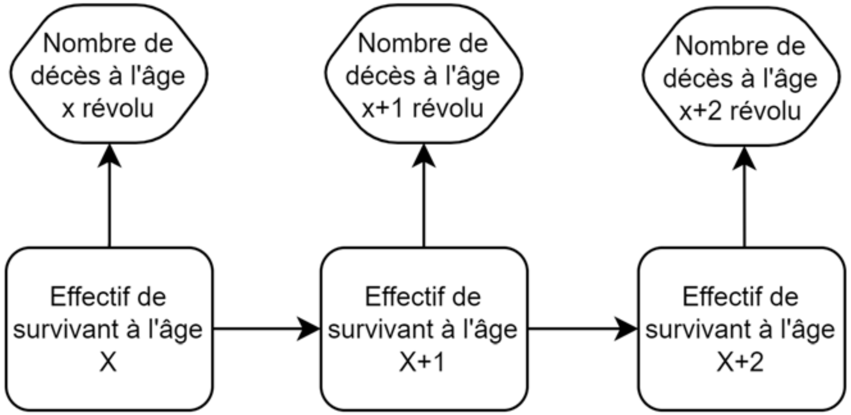
n – une amplitude d'intervalle d'âge (entre x et $x + n$)

P_x - l'effectif de la population à l'âge x
à la date d'un événement (naissance, anniversaire)

M_x - le nombre de décès à l'âge x révolu
sur l'intervalle de temps donnée (une année civile)

S_x - la probabilité de survie à l'âge x étant
la proportion de survivants à cet âge parmi
l'effectif initiale de cette génération (P_0) $\rightarrow S_x = \dfrac{P_x}{P_0}$

Séquence des transitons (modèle)



Par conséquent : $S_0 = \dfrac{P_0}{P_0} = 1$ (**S_0 est un paramètre de l'effectif, il est toujours égal à 1, ou à $1 \times 10^{\mathbb{N}}$**)

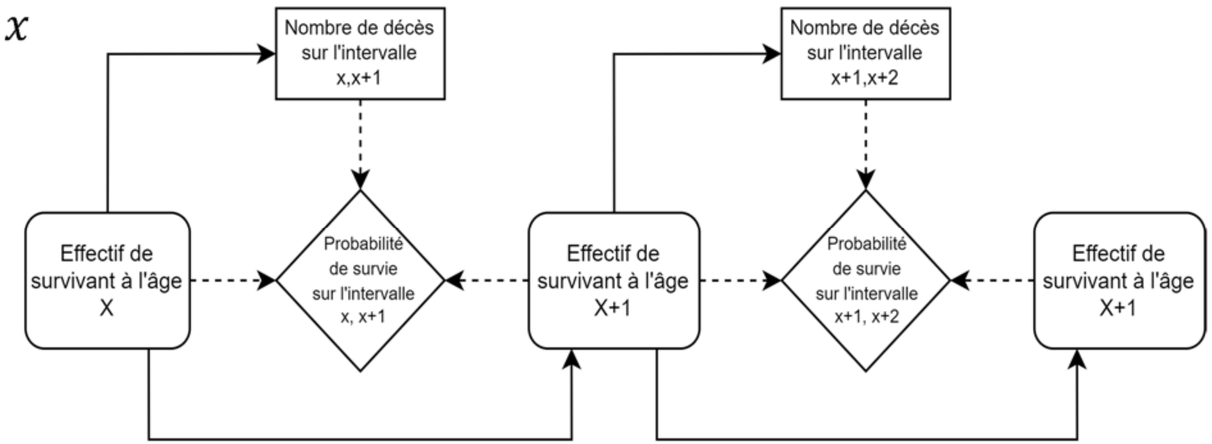
On peut calculer (estimer) les autres paramètres :

$D_x = \dfrac{M_x}{S_0}$ - la probabilité de décéder à l'âge x

${}_n p_x = \dfrac{S_{x+n}}{S_x}$ - la probabilité de survivre entre deux anniversaires

${}_n q_x = \dfrac{S_x - S_{x+n}}{S_x}$ - la probabilité de décéder entre deux anniversaires

Paramétrisation du processus des transitons



NB : Tous les paramètres sauf S_0 sont interdépendants

Mesures de transitions (survie) dans des intervalles de temps

t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t

$P_0 = 100$

$M_{0;1} = 4$

$\overline{P}_{0;1} = 0,5 \cdot (100+96) = 98;\ m_{0;1} = \dfrac{4}{98 \cdot 1} \cdot 1000 = 40,8‰;\ q_{0;1} = \dfrac{4}{100} \cdot 1000 = 40,0‰$

$P_1 = 96$

$M_{1;2} = 4$

$\overline{P}_{1;2} = 94;\ m_{1;2} = 42,55‰;\ q_{1;2} = 41,76‰$

$P_2 = 92$

$M_{2;3} = 4$

$\overline{P}_{2;3} = 90;\ m_{2;3} = 44,44‰;\ q_{2;3} = 43,48‰$

$P_3 = 88$

$M_{3;4} = 4$

$\overline{P}_{3;4} = 86;\ m_{3;4} = 46,5‰;$

$q_{3;4} = 45,5‰$

$P_4 = 84$

$M_{4;5} = 4$

$\overline{P}_{4;5} = 82;\ m_{4;5} = 48,8‰$

$q_{4;5} = 47,6‰$

$P_5 = 80$

$\overline{P}_{0;5} = \dfrac{100+80}{2} = 90$

$NAV_{0;5} = \dfrac{100+80}{2} \times 5 = 450$

$NAV_{0;5} = \sum_i \overline{P}_i = 98 + 94 + 90 + 86 + 82 = 450$

$m_{0;5} = \dfrac{20}{90 \cdot 5} \times 1000 = 44,4‰$ taux centré = moyenne des taux

$q_{0;5} = \dfrac{20}{100} \times 1000 = 200‰$

${}_1\hat{q}_{0;5} = \dfrac{0,2}{5} \times 1000 = 40‰$???

$q_{0;5} = 1 - \prod_{i=0}^{4} (1 - q_i) = 20‰$

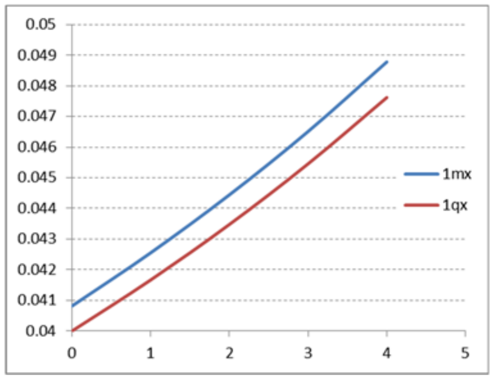
Résumé des transitions sous forme d'un tableau :

Age au début de l'intervalle (le temps individuel)	Amplitude de l'intervalle	Survivants à l'âge exact x	Décès dans l'intervalle d'âge [x;x+n)	Population exposée *(Nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge)* [x;x+n)	Taux de mortalité dans l'intervalle d'âge [x;x+n)	Probabilité de mourir dans l'intervalle d'âge [x;x+n)	Probabilité de survivre dans l'intervalle d'âge [x;x+1)
x	n	S_x ou (l_x)	${}_nd_x$	${}_nL_x$	${}_nm_x$	${}_nq_x$	${}_np_x$
0	1	100	4	98	0,0408	0,0400	0,9600
1	1	96	4	94	0,0426	0,0417	0,9583
2	1	92	4	90	0,0444	0,0435	0,9565
3	1	88	4	86	0,0465	0,0455	0,9545
4	1	84	4	82	0,0488	0,0476	0,9524
5	1	80	4				

Question : quelle est la durée de l'état « vivant » (durée de vie) moyenne entre la naissance (âge exact 0) et le 5e anniversaire (âge exact de 5 ans)?

Réponse : $${}_5e_0 = \frac{\sum_{x=0}^{4} {}_1L_t}{l_0}$$ une espérance mathématique de la durée de vie (espérance de vie moyenne)

Question : quelle est la durée moyenne de l'état « vivant » (durée moyenne de vie à la naissance) avec le taux mortalité = 4,44% ? (voir diapositive précédente)



Eléments d'une table démographique à l'extinction (décrément) simple

Table de mortalité est un modèle d'une population (génération) :
dans laquelle le nombre de naissances est égal à 1; et la somme de décès est égale au nombre de naissances

$\boldsymbol{x}$ – l'âge exact (au moment du x[ème] anniversaire);

$\boldsymbol{n_x}$ – l'amplitude des intervalles d'âge pour lesquels on calcule les probabilités (« un pas » de table), elle peut être unique ou spécifique à l'âge: p.ex. si ***n=1,4,5,5,….,*** alors ***x=0, 1, 5, 10, 15, …, 55,… 100*** etc.) : dans la table de mortalité on considère les intervalles entre ***x*** ($\geq x$,) et ***x+n*** ($< x+n$)

$\boldsymbol{S_x}$ – ($\equiv$ ***l(x)*** *ou* $\boldsymbol{l_x}$)le nombre de survivants jusqu'à l'âge exact x (***x****ème* anniversaire) ou « les survivants »;

$\boldsymbol{{}_nq_x}$ – le quotient de mortalité, ou la probabilité de mourir dans l'intervalle d'âge entre ***x*** et ***x+n*** pour un survivant à l'âge $\boldsymbol{x}$; d'autres écritures possibles : $\boldsymbol{q[x, x+n)}$ ou $\boldsymbol{q_{x,x+n}}$;

$\boldsymbol{{}_np_x}$ – la probabilité de survivre (ne pas mourir) de l'âge ***x*** à l'âge ***x+n*** ;
d'autres écritures possibles : $\boldsymbol{p[x, x+n)}$ ***ou*** $\boldsymbol{p_{x,x+n}}$;

$\boldsymbol{{}_nL_x}$ – « la population de table » ou le nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge entre ***x*** et ***x+n*** ;
d'autres écritures possibles : $\boldsymbol{L[x, x+n)}$ ***ou*** $\boldsymbol{L_{x,x+n}}$ = *la population exposée au risque de décès* ;

$\boldsymbol{{}_nd_x}$ – nombré de décès dans l'intervalle d'âge entre ***x*** et ***x+n*** (« décès de table ») ou la probabilité pour un nouveau-né de décéder dans l'intervalle d'âge entre ***x*** et ***x+n*** ; d'autres écritures possibles : $\boldsymbol{d[x, x+n)}$ ***ou*** $\boldsymbol{d_{x,x+n}}$

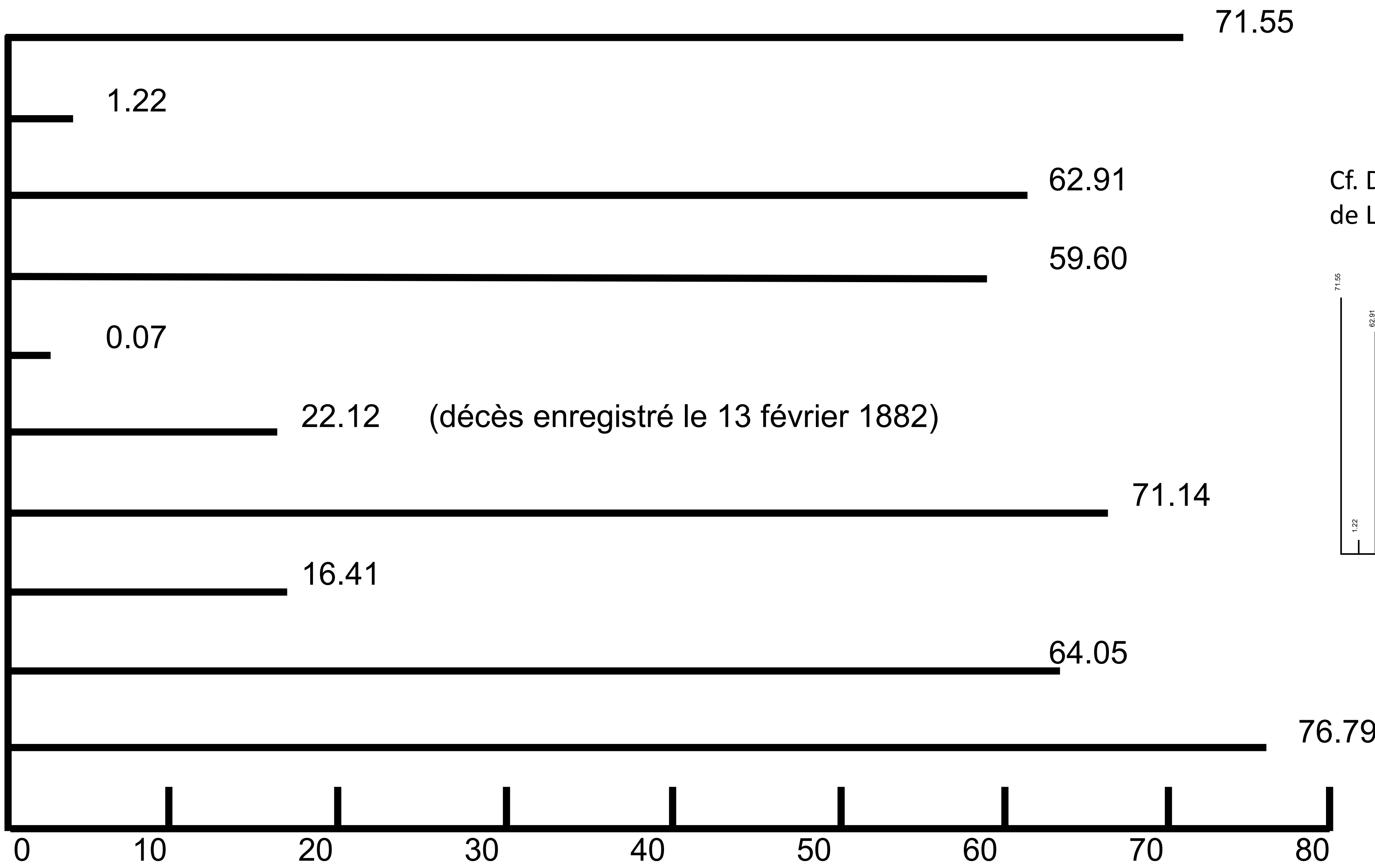
$\boldsymbol{{}_nm_x}$ – taux de mortalité dans l'intervalle d'âge entre ***x*** et ***x+n*** ou le taux de mortalité de table;
d'autres écritures possibles $\boldsymbol{m[x, x+n)}$ ***ou*** $\boldsymbol{m_{x,x+n}}$;

$\boldsymbol{T_x}$ – nombre d'années vécues après l'âge exact x (***x****ème* anniversaire) = la population de table âgée de plus de X ans ;

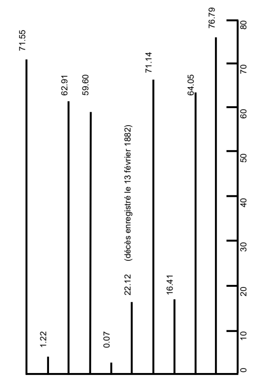
$\boldsymbol{e_x}$ – espérance de vie (durée moyenne de vie) après l'âge exact x (***x****ème* anniversaire); si x=0 on dit $\boldsymbol{e_0}$- espérance de vie à la naissance ;

$\boldsymbol{{}_na_x}$ – durée de vie moyenne dans le dernier intervalle d'âge [x, x+n) : l'intervalle d'âge de décès ; une fraction de vécue du dernier l'intervalle âge, la durée de vie après le dernier anniversaire d'un décédé.

Présentation de l'analyse de survie à partir des données sur l'âge au décès et les lignes de vie de 10 personnes nées le 1 janvier 1800 [1)]



Cf. Diagramme
de Lexis-Lexis



Comment construire une table de mortalité à partir des données individuelles ? Faites cet exercice !

[1)] Source: S. Preston et al. (2001), p. 39

Présentation des données individuelles sous la forme d'une table de mortalité

Age exact	Nombre de survivants à l'âge x	Nombre de décès entre x et x+n	Probabilité de mourir entre x et x+n	Probabilité de survivre de l'âge x à x+n	Durée moyenne de vie dans le dernier intervalle d'âge (entre x et x+n)	Nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge	Taux de mortalité dans l'intervalle d'âge entre x et x+n	Nombre d'années vécues après l'âge x	Espérance de vie à l'âge x
x	l_x *ou* S_x	${}_nd_x$	${}_nq_x$	${}_np_x$	${}_na_x$	${}_nL_x = n \cdot l_{x+n} + {}_nd_x \cdot {}_na_x$	${}_nm_x = {}_nd_x / {}_nL_x$	$T_x = \sum {}_nL_x$	$e_x = T_x / S_x$
0	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	0,07	1 x 9 + 1 x 0,07= = **9.07**	$\frac{1}{9,07}$	436,79+9,07= = **445,86**	$\frac{455,86}{10} = 44,568$
1	9	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	0,22	4 x 8 + 1 x 0,22 = = **32,22**	$\frac{1}{32,22}$	404,57+32,22= = **436,79**	$\frac{436,79}{9} = 43,679$
5	8	0	0	1	----	8 x 5 = **40**	0	364,57+40= = **404,57**	$\frac{404,57}{8} = 50,751$
10	8	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	6,41	10 x 7 +1 x 6.41= =**76,41**	$\frac{1}{76,41}$	288,16+76,41= = **364,57**	$\frac{364,57}{8} = 45,571$
20	7	1	…					**288,16**	
30	à continuer	0							
40									
50									

Devoir: terminer la construction de cette table de mortalité

Structure d'une table démographique : 1) probabilité de survie

La racine de table : $\boldsymbol{S_0 = 10^{\mathbb{N}}}$, avec ℕ =0, 1, 2,…, n – un nombre naturel)

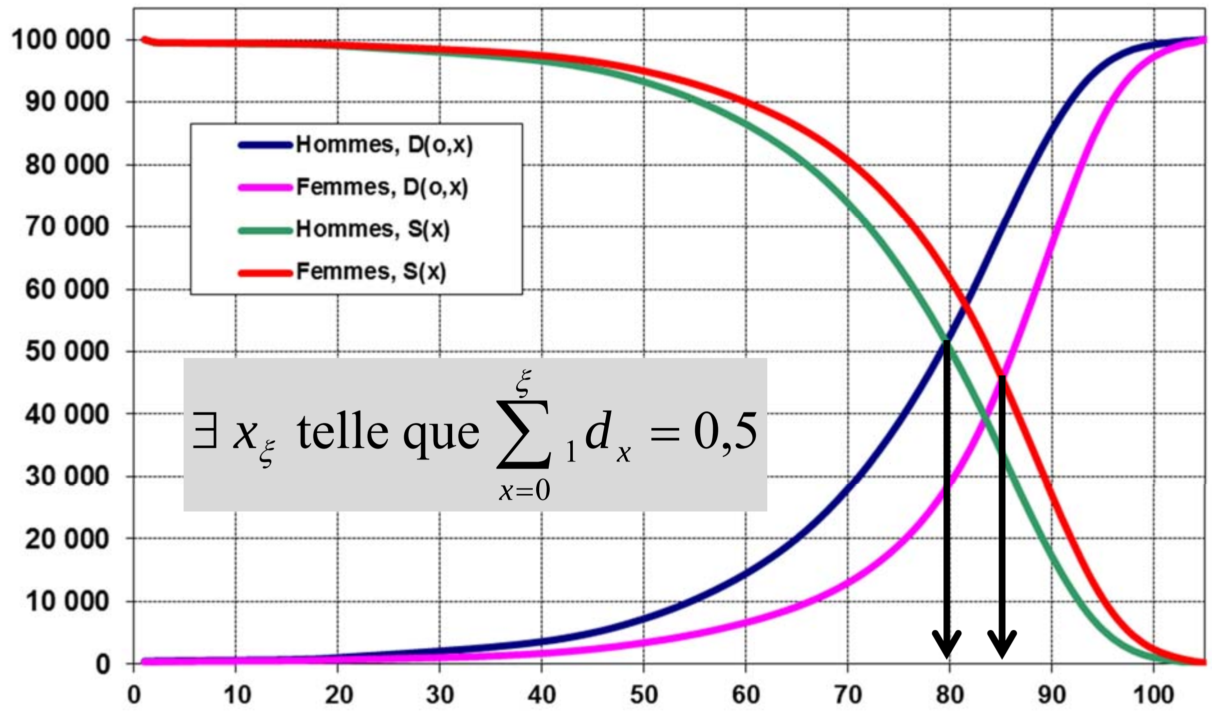
Pour la meilleure visibilité on prend pour la racine 1 000, 10 000 ou 100 000 (ℕ =3, ℕ =4 ou ℕ =5).

Pour faciliter les calculs il est recommandé de choisir $S_0 = 1$ (ℕ=0)

n_x – amplitude des classes d'âge peut varier de 1 à 5, 10, 15 etc.

Soit ${}_np_x$ probabilité de survie sur l'intervalle d'âge [x,x+n), alors $S_{x+n} = S_x \cdot {}_np_x$ et en générale $S_x = S_0 \cdot \prod_{a=0}^{x-n} {}_np_a$

Probabilité de survivre et mourir par sexe dans la table de mortalité (France, 2001-2002)



x_ξ = durée de vie médiane ou **la durée de vie probable**
(hommes = 80 ans; femmes = 85 ans)

$\boldsymbol{S_x} \rightarrow$
le nombre de survivants jusqu'à l'âge exact ***x*** :
≡ la probabilité de survie, si ***S₀=1***

$\boldsymbol{D_x = 1 - S_x} \rightarrow$
le nombre de décès survenu avant l'âge exact ***X :***
≡ le risque de décès, si ***S₀=1***

On voit que $\boldsymbol{D_x + S_x = 1}$ pour tout $\boldsymbol{x}$
sinon $\boldsymbol{D_x + S_x = S_0}$

Soit ${}_nd_x = S_{x+n} - S_x$: décès de table
≡ le nombre de décès survenus
sur l'intervalle d'âge x, x+n

$$D_x := {}_xD_0 = \sum_{a=0}^{x} {}_nd_a$$

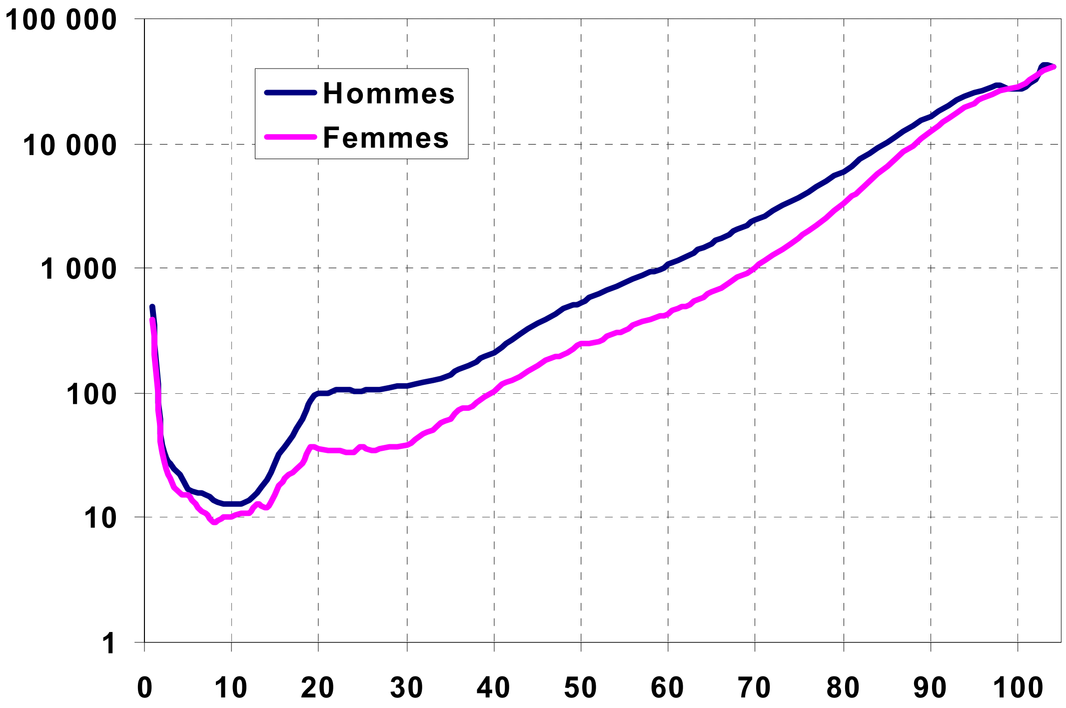
Structure d'une table démographique: 2) probabilité ou quotient de mortalité

Soit ${}_n p_x$ – la probabilité de survivre (de ne pas mourir) entre les âges exacts ***x*** et ***x+n*** est complémentaire à la probabilité de mourir (quotient de mortalité ${}_n q_x$) sur cet intervalle :

$$ {}_n p_x = 1 - {}_n q_x \quad \Rightarrow \quad {}_n q_x = 1 - {}_n p_x \qquad (1)$$

Probabilité de mourir par âge et par sexe dans la table de mortalité (France, 2001-2002)

sur papier semi logarithmique



Nota: un très grand facteur (x 1000) de la variation des indicateurs de la table de mortalité impose l'utilisation du papier semi-logarithmique pour la visualisation correcte

Soit S_0 = 1 (racine de table) x $10^{\mathbb{Z}}$

et $S_{x+n} = S_x \cdot {}_n p_x$ en y appliquant (1)

$$\boxed{S_{x+n} = S_x \cdot (1 - {}_n q_x)} \qquad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{{}_n q_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{S_x} = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x}} \qquad (3)$$

$$\boxed{{}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{S_x}} \qquad (4)$$

$$\boxed{{}_n p_x = \frac{S_{x+n}}{S_x}} \qquad (5)$$

Structure d'une table démographique: 3) décès de table ou la fréquence de sorties

Décès de la table : le nombre de décès dans l'intervalle de l'âge entre x et x+n

$$ {}_n d_x = S_x - S_{x+n} $$

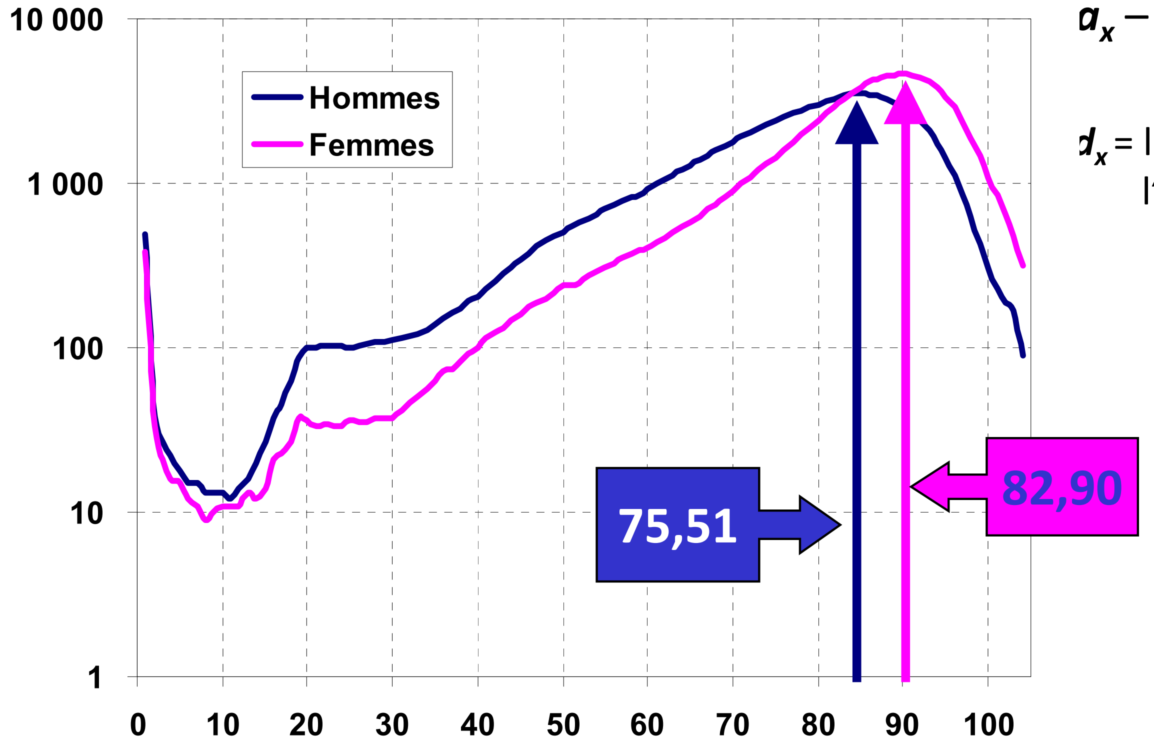
$$ \sum_{x=0}^{\omega} {}_n d_x = (S_0 - \cancel{S_1}) + (\cancel{S_1} - \cancel{S_5}) + (\cancel{S_5} - S_{10}) + \ldots + (S_{\varpi - n} - S_{\omega}) = S_o $$

sachant que $S_\omega = 0$

si $S_0 = 1 \rightarrow \sum_{x=0}^{\omega} {}_n d_x = 1$

Décès par âge et par sexe dans la table de mortalité (France, 2001-2002)

distribution tri-modale



${}_n d_x$: la fréquence de la durée de vie $x + {}_n a_x$

a_x – la durée moyenne de vie dans le dernier intervalle d'âge $0 < {}_n a_x \leq n$

d_x = la probabilité pour un nouveau-né de décéder dans l'intervalle d'âge entre x et x+n

$$ \overline{e} = \sum_{x=0}^{\omega} (x + {}_n a_x) \cdot {}_n d_x \equiv e_0 $$

L'âge moyen au décès ou la durée moyenne de vie d'un nouveau-né (e_o)

$\exists\ x_\xi$ telle que

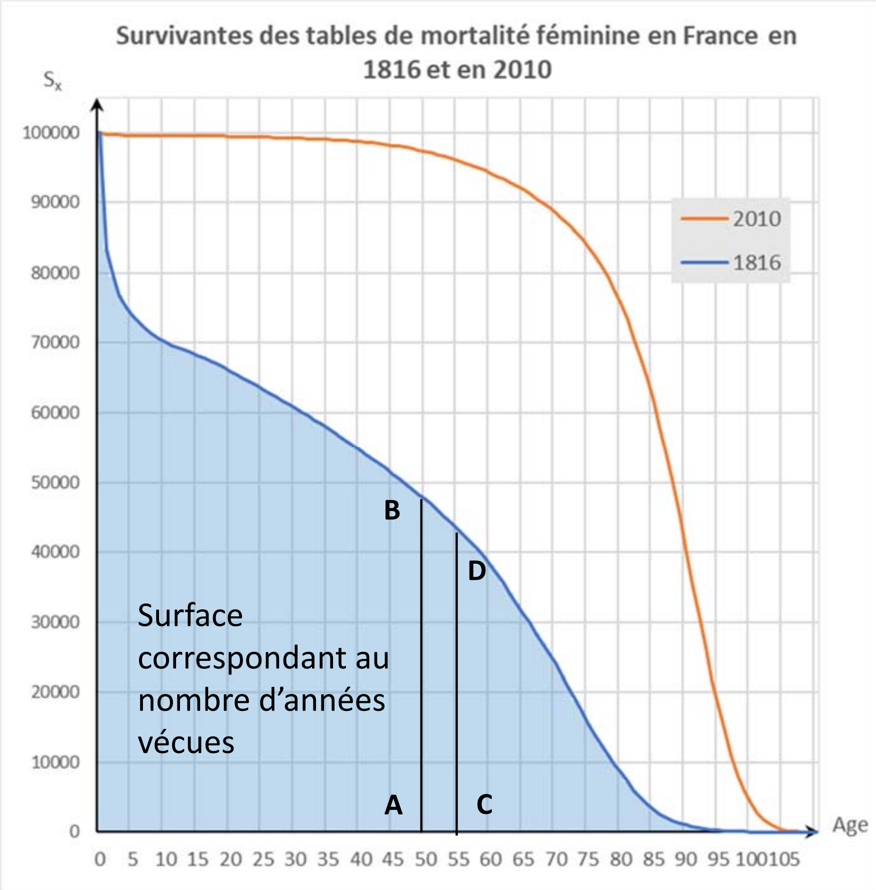
$$ {}_n d_{x+1} > {}_n d_x ; \text{si } x < x_\xi $$

$$ \text{et } {}_n d_{x+1} < {}_n d_x ; \text{si } x > x_\xi $$

x_ξ = durée de vie modale

Structure d'une table démographique: 4) la population de table et 5) l'espérance de la durée (moyenne) de vie

$_{n}\boldsymbol{L_x}$ – la population de table ou le nombre d'années vécues à l'âge $\boldsymbol{x}$ (entre l'âge x et $x+n$) par les survivants $\boldsymbol{S_x}$ (jusqu'à X^{e} anniversaire)



$_{n}\boldsymbol{L_x}$ est donc composé de ($\boldsymbol{S_{x+n}} \times \boldsymbol{n}$) années vécues par survivants à l'âge suivant $\boldsymbol{x+n}$

et ($_{n}\boldsymbol{d_x} \times {}_{n}\boldsymbol{a_x}$) années vécues par les décédés sur cet intervalle d'âge :

$_{n}\boldsymbol{a_x}$ étant la durée moyenne de vie dans le dernier intervalle d'âge

$$_{n}L_x = n \cdot S_{x+n} + {}_{n}d_x \cdot {}_{n}a_x$$

En mettant $_{n}\boldsymbol{a_x} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}$ on obtient : $_{n}L_x = n \cdot \frac{S_x + S_{x+n}}{2}$

Par conséquent la durée moyenne de vie sur l'intervalle d'âge $x, x+n \rightarrow {}_{n}e_x = \frac{{}_{n}L_x}{S_x}$

et la durée moyenne de vie sur l'intervalle d'âge $\mathbf{0}, +\infty$ (l'espérance de vie à la naissance) $\boldsymbol{e_o}$ ➔ $e_0 = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} {}_{n}L_x}{S_0}$

On calcule $T_x = \sum_{i=x}^{n} {}_{n}L_i$ le nombre total d'années vécus par les survivants à l'âge x → S_x

Estimation approximative usuelle de l'espérance de vie dans la table démographique

Hypothèse (très osée):

la distribution de densité de décès à l'intérieur de chaque intervalle d'âge est uniforme. Donc, la moyenne est située juste au milieu d'intervalle.

$$\Rightarrow e_0 = \frac{\sum_{x=0}^{\omega}\left(x+\frac{n_x}{2}\right)\cdot {}_n d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} {}_x d_x} \qquad (1)$$

Simplification supplémentaire:

pour tous les décédés la durée de vie dans le dernier intervalle d'âge entre x et x+n égale à $^{n}/_{2}$ en moyenne .

$$\Rightarrow e_0 = \frac{n}{2} + \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x\cdot {}_n d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} {}_n d_x} \qquad (2)$$

Si $n = 1$ $\Rightarrow e_0 = 0,5 + \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x\cdot {}_x d_x}{\sum_{x=0}^{\omega-n} {}_x d_x}$ (3)

Sachant que $d_x = S_x - S_{x+1}$ on peut réécrire la formule (3) $\Rightarrow e_0 = 0,5 + \frac{\sum_{x=1}^{\omega} S_x}{S_0}$;

et si S_0=1 $e_0 = 0,5 + \sum_{x=1}^{\omega} S_x$

Sinon puisque $S_x = {}_1L_x - 0,5\cdot {}_n d_x \Rightarrow e_0 = 0,5 + \sum_{x=0}^{\omega} {}_1L_x - 0,5\cdot\sum_{x=0}^{\omega} {}_1 d_x$

$$\boxed{e_0 = \sum_{x=0}^{\omega} {}_n L_x}$$

Nota!! **0,5 est disparu**

L'espérance de vie dans la table démographique (suite)

$\boldsymbol{e_0}$ est l'espérance de vie à l'âge ***0*** (ou au moment initial $\boldsymbol{t_0}$) Il est tout à fait possible de calculer l'espérance de vie pour n'importe quel âge « $\boldsymbol{\lambda}$ »➔ $\boldsymbol{e_\lambda}$:

$$e_\lambda = \frac{T_\omega + \sum_{x=\lambda}^{\omega-n} {}_nL_x}{S_\lambda}$$

Rappel: $T_\omega \equiv {}_\infty L_\omega$

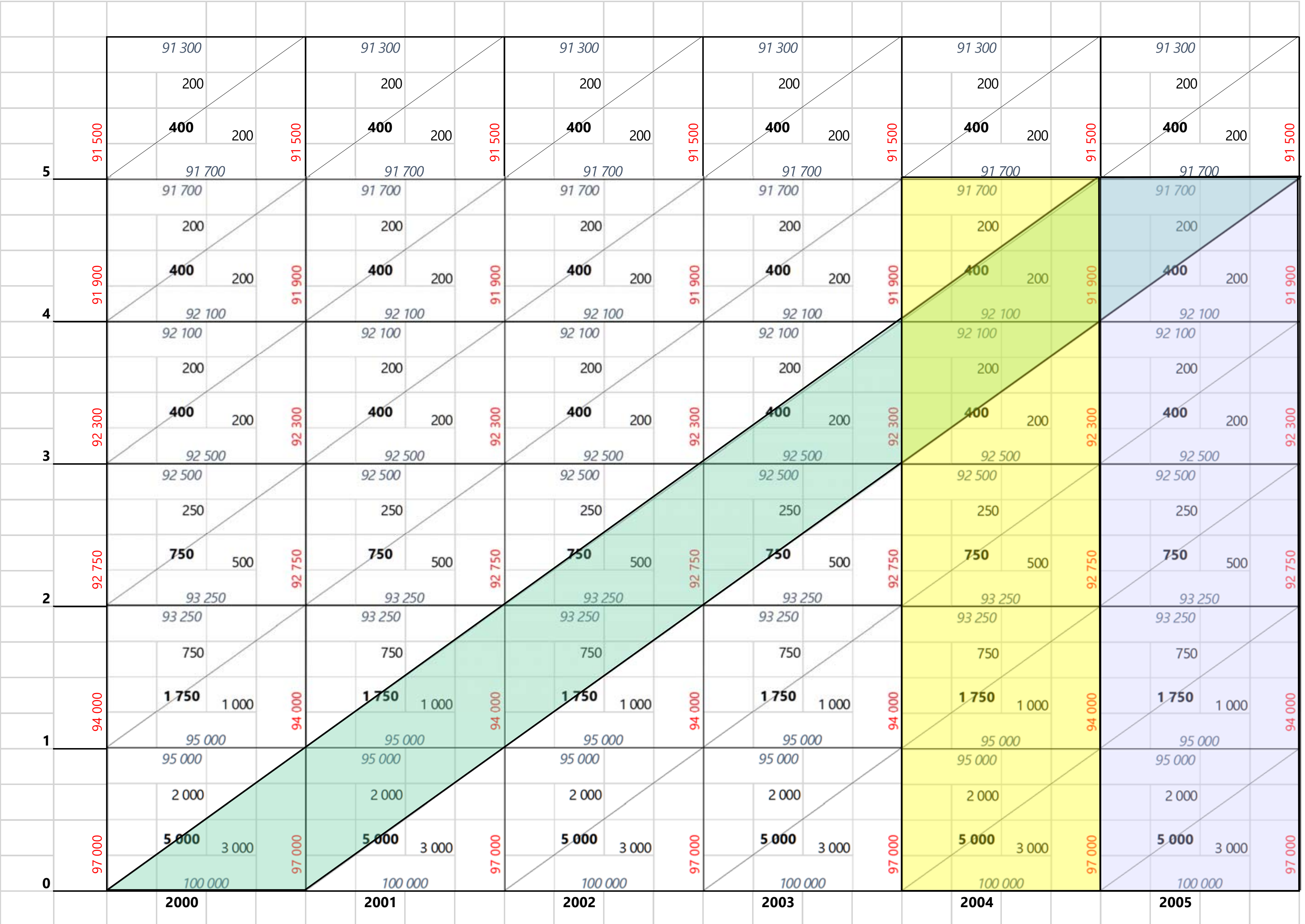
$\boldsymbol{e_{x/\lambda}}$ est l'espérance de vie à la naissance sous condition de survie à l'âge « $\boldsymbol{\lambda}$ » :

$$e_{\lambda|0} = \frac{\sum_{x=\lambda}^{\omega} (x + {}_na_x) \cdot {}_nd_x}{\sum_{x=\lambda}^{\omega} {}_nd_x} + \lambda$$

$\boldsymbol{e_{\alpha,\beta}}$ la durée moyenne de vie dans un intervalle d'âge $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$: $e_{\alpha,\beta} = \frac{\sum_{x=\alpha}^{\beta-n} {}_nL_x}{S_\alpha}$

Alors il est possible et utile de calculer la durée moyenne de vie à la retraite et celle à l'âge de travail, par exemple entre 20 et 65 ans, pour la comparer avec l'espérance de vie de retraités

Génération fictive et la notion/hypothèse de la stationnarité dans la table de mortalité (exemple numérique)



Génération fictive et la notion/hypothèse de la stationnarité dans la table de mortalité (généralisation)

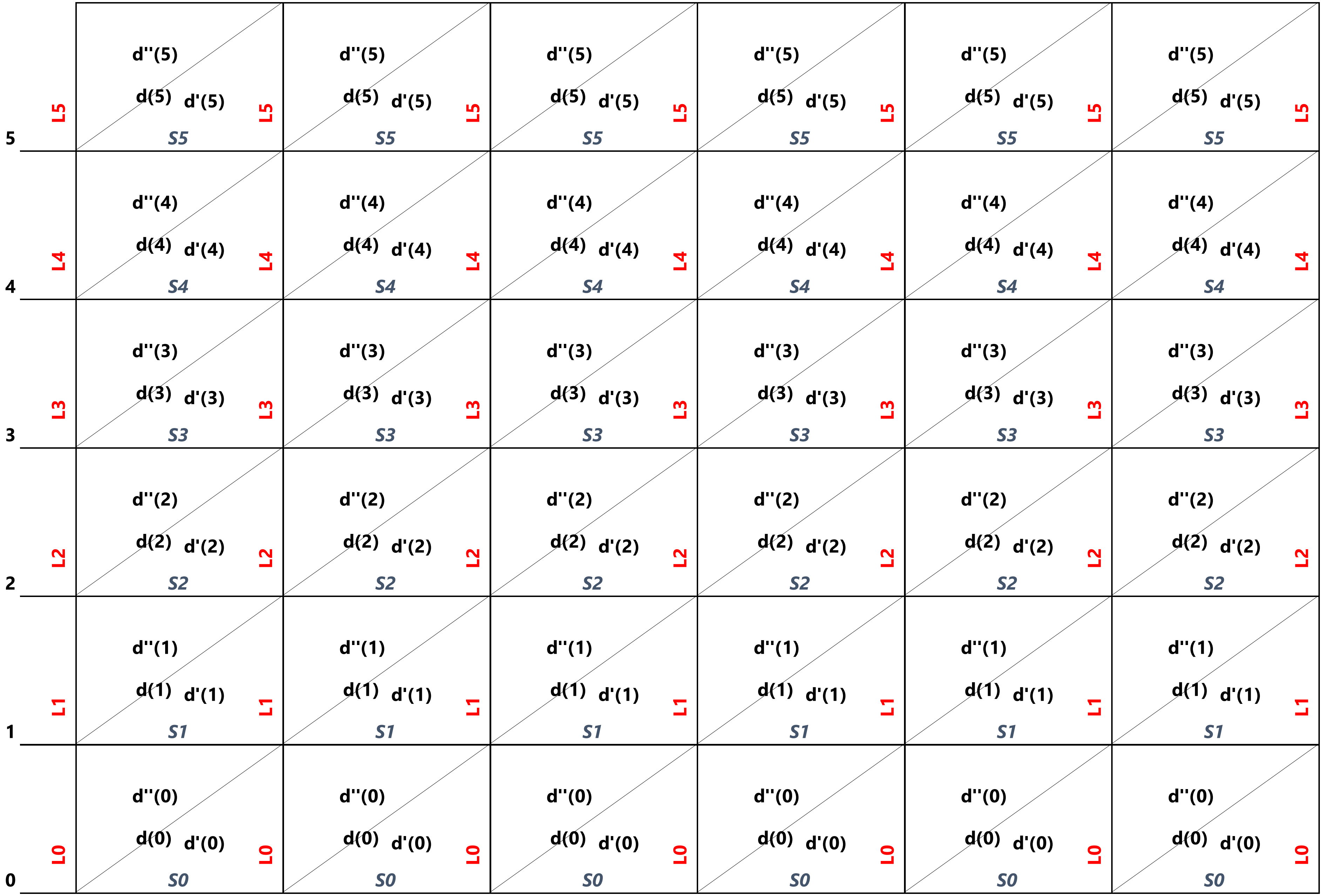
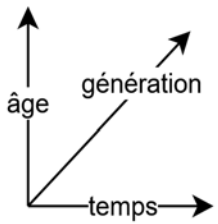


Table de mortalité pour une période (génération fictive)

Justification : présenter une image intégrale de la mortalité des plusieurs générations dans un intervalle de temps assez court

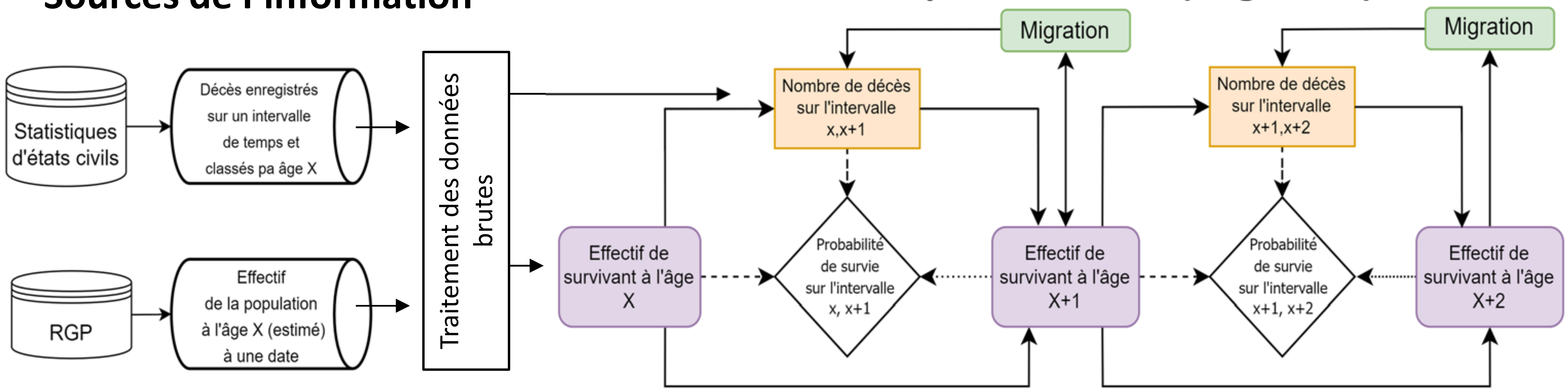
Les approches et les hypothèses :



- sur les intervalles de temps courts, la variation des paramètres de la mortalité associés à la période est moins importante (voire négligeable) que la variation associée l'âge et à l'année de naissance des générations ;
- la densité de la probabilité (risque) de décès sur un intervalle d'âge assez court peut être considérée comme étant linéaire (tendance centrale = taux de mortalité) ;
- la distribution des décès sur l'intervalle d'âge assez court peut être considérée comme étant uniforme

Sources de l'information

Évènements perturbateurs (migration)



Dans ces conditions : $\frac{P_{x+1}}{P_x} \neq \frac{S_{x+1}}{S_x}$ et $\frac{D_x}{P_x} \neq {}_nq_x = 1 - \frac{S_{x+1}}{S_x}$ → il faut trouver une ou des solutions

Interlude :

Quelques éléments pour l'histoire des tables de mortalité

- Domitius Ulpien (Gnaeus Domitius Annius Ulpianus,170 – 223 ou 228),
- John Graunt (15.04.1620 - 18.04.1674),
- Edmond Halley (08.11.1656 – 14.01.1742)

« Table de mortalité » d'Ulpien
(la durée de l'usufruit selon l'âge du bénéficiaire)

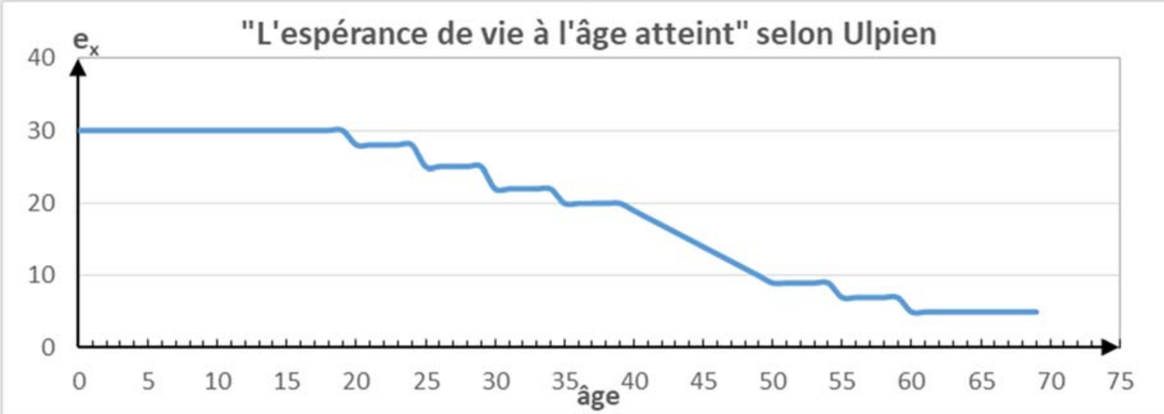
DIGESTORUM SEU PANDECTARUM / LIBER TRIGESIMUSQUINTUS / TITULUS II.

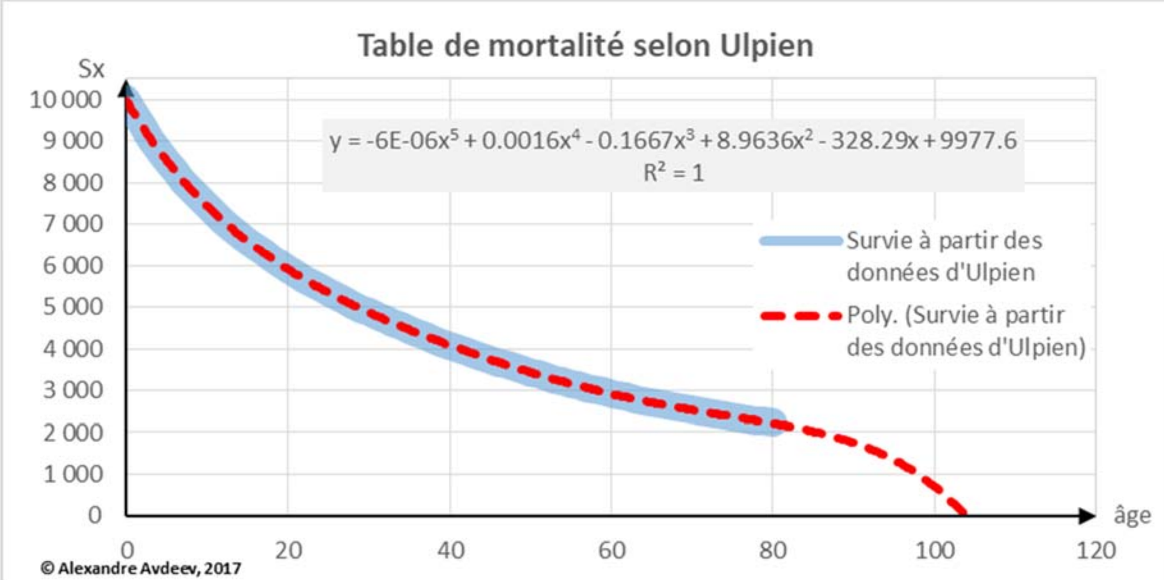
AD LEGEM FALCIDIAM: *68. Aemilius- Macer au liv.2 sur la Loi du vingtième des successions*

« Ulpien prescrit la méthode suivante pour calculer les alimens faits à quelqu'un. Les alimens laissés à quelqu'un depuis le bas âge jusqu'à vingt ans sont réputés devoir durer trente ans, et on retient sur ces alimens la Falcidie en conséquence de ce calcul. Etc. »

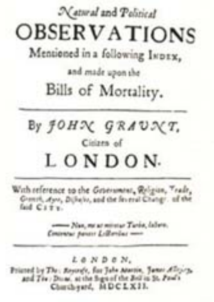
Domitius Ulpianus,
juriste romain, 170—228

Âge du bénéficiaire	Durée de l'usufruit
0–19	30
20–24	28
25–29	25
30–34	22
35–39	20
40–49	(60-x-1)
50–54	9
55–59	7
60–	5





Pour y=0, cette équation a une seule racine en nombre réel x=37.7262, ce qui est proche à l'espérance de vie à la naissance $e_o \approx 38.04$


Natural and Political
OBSERVATIONS
Mentioned in a following Index,
and made upon the
Bills of Mortality.
By JOHN GRAUNT,
Citizen of
LONDON.

Idée d’une table de mortalité de John Graunt

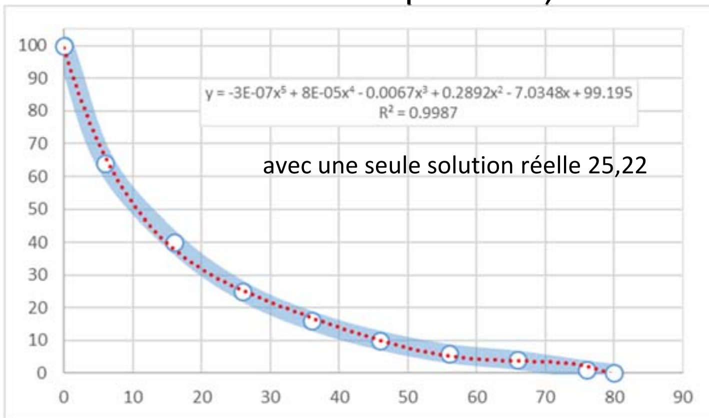
1662 –**John Graunt,** citoyen de Londres publie

Natural and Political Observations Mentioned in a following Index and made upon the Bills of Mortality

9. Where as we have found, that of 100 quick Conceptions about 36 of them die before they be six years old, and that perhaps but one surviveth **(p.61/62)** 76, we, having seven Decads between six and 76, we sought six mean proportional numbers between 64, the remainer, living at six years, and the one, which survives 76, and finde, that the numbers following are practically near enough to the truth; for men do not die in exact Proportions, nor in Fractions: from when arises this Table following.

Viz. of 100 there dies

Within the first six years	**36**	**The fourth**	**6**
The next ten years, or Decad	**24**	**The next**	**4**
The second Decad	**15**	**The next**	**2**
The thrid Decad	**9**	**The next**	**1**



10. From whence it follows, that of the said 100 conceived there remains alive at six years end 64.

At Sixteen years end	**40**	**At Fifty six**	**6**
At Twenty six	**25**	**At Sixty six**	**3**
At Tirty six	**16**	**At Seventy six**	**1**
At Fourty six	**10**	**At Eighty**	**0**

11. It follows also, that of all, which have been conceived, there are now alive 40 per Cent. above sixteen years old, 25 above twenty-six years old, & sic deniceps, as in the above Table: there are therefore of Aged between 16, and 56, the number of 40, less by six, viz. 34; of between 26, and 66, the number of 25 less by three, viz. 22: sic deniceps **(p.62/63)**

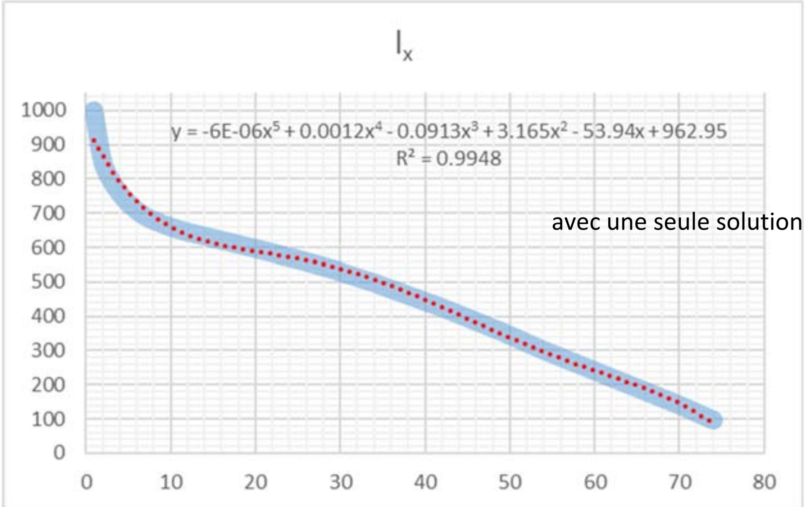
Invention de la table de mortalité, Edmond Halley

1693 – **Edmond Halley** publie

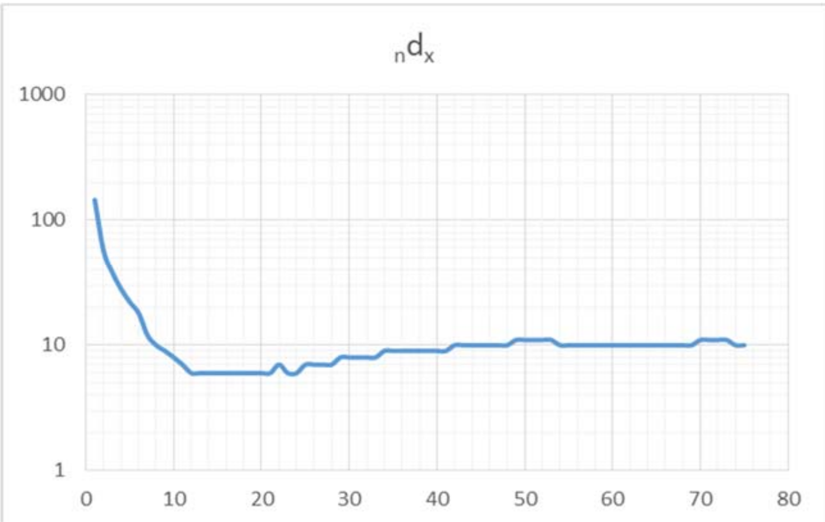
“An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; With an Attempt to Ascertain the Price of Annuities upon Lives”. By Mr. E. Halley, R.S.S., *Philosophical Transactions*, v. XVII, January 1, №196, 1693, p. 596 - 610. + “Some further Considerations on the Breslow bills of Mortality, by the same hand with the former”, Ibid., № 198, p. 654-656.1

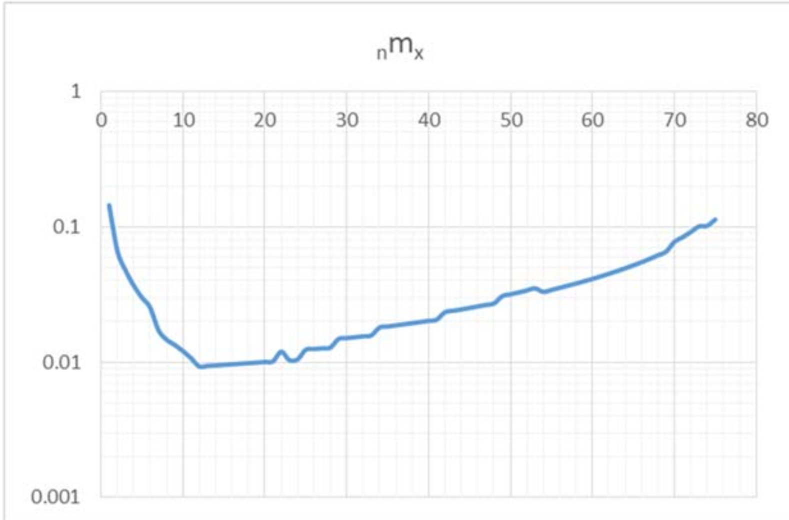
Age. Curt.	Per-fons.	Age. Curt.	Per-fons	Age. Curt.	Per-fons	Age. Curt.	Per-fons	Age. Curt.	Per-fons	Age. Curt.	Pet-fons
1	1000	8	680	15	628	22	586	29	539	36	481
2	855	9	670	16	622	23	579	30	531	37	472
3	798	10	661	17	616	24	573	31	523	38	463
4	760	11	653	18	610	25	567	32	515	39	454
5	732	12	646	19	604	26	560	33	507	40	445
6	710	13	640	20	598	27	553	34	499	41	436
7	692	14	634	21	592	28	546	35	490	42	427
Age Curt	Per-fons.	Age. Curt.	Per-fons	Age. Curt.	Per-fons	ge Curt	Per-fons	Age. Curt.	Per-fons	Age. Crir.	Per-fons
43	417	50	346	57	272	64	202	71	131	78	58
44	407	51	335	58	262	65	192	72	120	79	49
45	397	52	324	59	252	65	182	73	109	80	41
46	387	53	313	60	242	67	172	74	98	81	34
47	377	54	302	61	232	68	162	75	88	82	28
48	367	55	292	62	222	69	152	76	78	83	23
49	357	56	282	63	212	70	142	77	68	84	20

Age.	Perfons.
7	5547
14	4584
21	4270
28	3964
35	3604
42	3178
49	2709
56	2194
63	1694
70	1204
77	692
84	253
100	107
	34000
Sum Total.	



avec une seule solution réelle 73.4





Méthodes ou algorithmes de la construction des tables de mortalité

Entamer la construction d'une table de mortalité (trouver indicateur d'entrée)

Soit P_x – effectif de la population, et D_x – le nombre de décès à l'âge ***x* révolu** dans une population (supposée stationnaire) ; alors on estime la probabilité de mourir ${}_nq_x$, ou probabilité de survivre ${}_np_x$ sur l'intervalle d'âge [x, x+n) dans une population fermée (sans migration)

*D'après l'hypothèse de la stationnarité les configurations **ABCD** et **ABDE** sont équivalentes.*

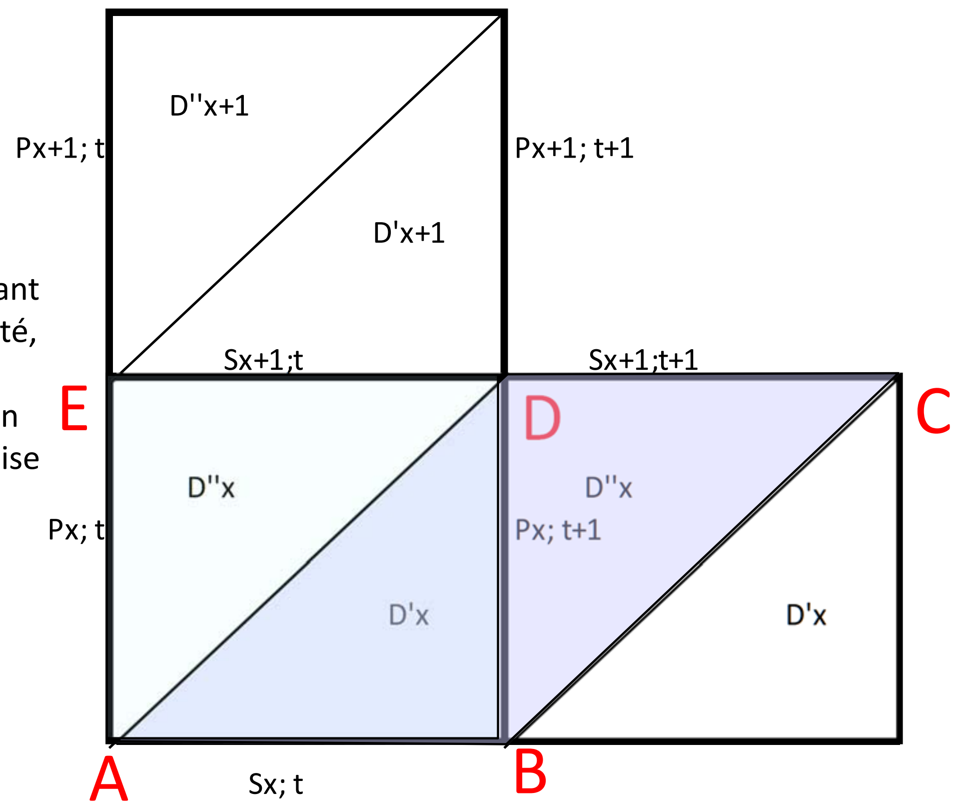
$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x = 1 - \left(1 - \frac{D'_x}{S_{x,t}}\right) \cdot \left(1 - \frac{D''_x}{P_{x,t}}\right) $$

$$ {}_np_x = \left(1 - \frac{D'_{x,t}}{P_{x,t+1} + D'_{x,t}}\right) \cdot \left(1 - \frac{D''_{x,t}}{P_{x,t}}\right) $$

Puisque selon l'hypothèse de stationnarité les probabilités dans les triangles BDC et ADE sont identiques :

$$ {}_np_x = \left(\frac{P_{x,t+1}}{P_{x,t+1} + D'_{x,t}}\right) \cdot \left(\frac{P_{x,t} - D''_{x,t}}{P_{x,t}}\right) $$

(cf. l'hypothèse de la stationnarité, permettant de calculer la probabilité, qui n'est pas la même chose que la proportion de survivants; on n'utilise pas Px+1 dans ces calculs)



Soit $D'_x = D''_x = 0.5\ {}_nD_x$ → ce qui va comme une hypothèse pour les âges adultes, si la répartition des décès entre les triangles est inconnue:

$$ {}_np_x = \left(\frac{P_{x,t+1}}{P_{x,t+1} + 0{,}5 \cdot D_{x,t}}\right) \cdot \left(\frac{P_{x,t} - 0{,}5 \cdot D_{x,t}}{P_{x,t}}\right) $$

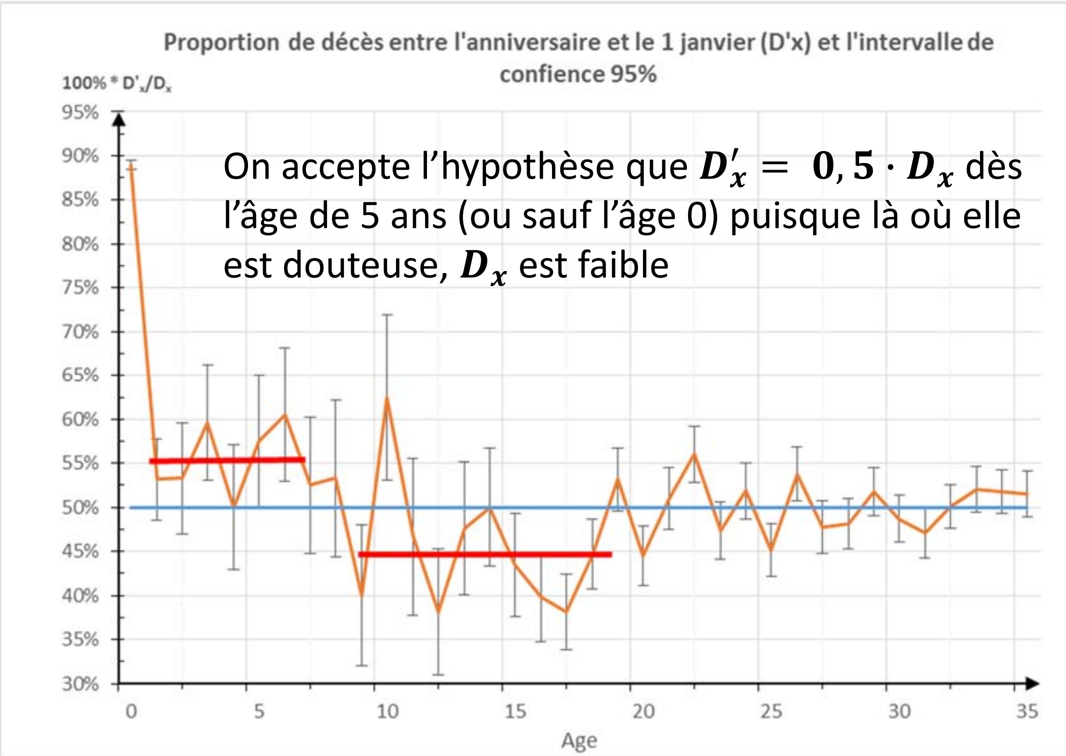
Pour préciser la distribution des décès entre les triangles il faut appliquer un facteur de séparation (voir la mortalité infantile)

Données pour construire la table de mortalité (INSEE)

Pyramide des âges au 1er janvier 2014, France métropolitaine				
Mis à jour : janvier 2016				
Champ : France métropolitaine				
Source : Insee, estimations de population (résultats provisoires à fin 2015)				
Année de naissance	**Âge révolu**	**Nombre d'hommes**	**Nombre de femmes**	**Ensemble**
2013	0	385 670	367 577	753 247
2012	1	390 569	370 608	761 177
2011	2	392 386	376 860	769 246

Pyramide des âges au 1er janvier 2015, France métropolitaine				
Mis à jour : janvier 2016				
Champ : France métropolitaine				
Source : Insee, estimations de population (résultats provisoires à fin 2015)				
Année de naissance	**Âge révolu**	**Nombre d'hommes**	**Nombre de femmes**	**Ensemble**
2014	0	384 840	368 054	752 894
2013	1	387 297	368 557	755 854
2012	2	391 851	372 349	764 200
2011	3	395 768	379 472	775 240
2010	4	408 248	388 768	797 016

T73 : Décès selon le sexe, l'âge en années révolues et la survenance du décès avant ou après l'anniversaire de naissance. Année 2014									
CHAMP : France métropolitaine									
SEXE	***Ensemble***			Hommes			Femmes		
Décès avant ou après anniversaire	***Ensemble***	Décès avant anniversaire	Décès le jour ou après anniversaire	***Ensemble***	Décès avant anniversaire	Décès le jour ou après anniversaire	***Ensemble***	Décès avant anniversaire	Décès le jour ou après anniversaire
Âge en années révolues									
0 an	2 598	315	2 283	1 446	159	1 287	1 152	156	996
1 an	209	99	110	111	52	59	98	47	51
2 ans	123	57	66	60	28	32	63	29	34
3 ans	86	35	51	52	21	31	34	14	20
4 ans	73	36	37	48	24	24	25	12	13



On accepte l'hypothèse que $D'_x = 0,5 \cdot D_x$ dès l'âge de 5 ans (ou sauf l'âge 0) puisque là où elle est douteuse, D_x est faible

Calculs de la durée de vie des enfants décédés avant le 1er anniversaire

Source :	INSEE (T77 : Décès d'enfants de moins d'un an selon le sexe et la			
	Filles	Garçons	Total	durée de vie
semble des moins d'un an	1152	1446	2598	(jours)
Nés l'année précédente	156	159	315	
Nés la même année	996	1287	2283	
0 jour	317	361	678	0.5
1 jour	73	84	157	1.5
2 jours	49	64	113	2.5
3 jours	42	55	97	3.5
4 jours	30	42	72	4.5
5 jours	24	49	73	5.5
6 jours	28	45	73	6.5
7 à 13 jours	115	163	278	10
14 à 20 jours	58	94	152	17
21 à 27 jours	42	63	105	24
28 à 60 jours	110	147	257	44
61 à 90 jours	60	52	112	75
91 à 120 jours	46	59	105	105
121 à 150 jours	30	43	73	135
151 à 180 jours	18	41	59	165
181 à 210 jours	34	21	55	195
211 à 240 jours	23	17	40	225
241 à 270 jours	19	16	35	255
271 à 301 jours	13	13	26	285
302 à 332 jours	16	11	27	315
333 à 365 jours	5	6	11	345
D'	86%	89%	88%	
D''	14%	11%	12%	
$_1a_0$ (jours)	35.376	29.718	32.227	

Problème de la mortalité aux jeunes âges

Si à partir des données individuelles (voir la diapositive 26) il n'est pas possible de calculer le taux de mortalité infantile et le taux mortalité des enfants à l'âge 1-4 ans, il faut trouver une solution plausible pour estimer la durée de vie des enfants décédés à ces âges.

Il est évident que sur ces intervalles l'hypothèse ${}_n a_x = \frac{n}{2}$ n'est pas admissible.

On a vu (thème 3 « Mortalité infantile ») que le score ${}_n a_x$ dépend du niveau de la mortalité infantile (${}_1 m_0$ et ${}_4 m_1$), plus celles-ci sont faibles, plus les décès sont concentrés au début de l'intervalle d'âge

Si les données empiriques manquent pour calculer directement ${}_1 a_0$ et ${}_4 a_1$, Preston et al. (2001, p.48) proposent les estimer avec les régressions sur le niveau de la mortalité infantile (les paramètres du modèle sont estimés à partir de la famille West des tables-type de mortalité de Coale-Demeny, 1983)

	Garçons	**Filles**
${}_1 m_0 \geq 0{,}107$	${}_1 a_0$=0,330	${}_1 a_0$=0,350
	${}_4 a_1$= 1,352	${}_4 a_1$= 1,361
${}_1 m_0 < 0{,}107$	${}_1 a_0 = 0{,}045 + 2{,}684 \cdot {}_1 m_0$	${}_1 a_0 = 0{,}053 + 2{,}800 \cdot {}_1 m_0$
	${}_4 a_1 = 1{,}651 - 2{,}861 \cdot {}_1 m_0$	${}_4 a_1 = 1{,}52 - 1{,}518 \cdot {}_1 m_0$

Problème de calculs pour l'intervalle terminal (fermé-ouvert) de la table de mortalité

L'approche général ne convient non plus pour l'intervalle terminal ($x = \omega$) de la TM dans laquelle $_{\infty}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; _{\infty}\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{1}$;

Pour résoudre ce problème on suppose que $_{\infty}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\omega}}$, le taux de mortalité observé (calculé à partir des données brutes) est égal à $_{\infty}\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\omega}}$, le taux de mortalité de table :

$$_nM_x = {}_nm_x = \frac{_nd_x}{_nL_x} \quad \text{si } n = \infty \text{ et } x = \omega \rightarrow {}_{\infty}m_{\omega} = \frac{_{\infty}d_{\omega}}{_{\infty}L_{\omega}} \rightarrow {}_{\infty}L_{\omega} = \frac{_{\infty}d_x}{_{\infty}M_x} = T_{\omega}$$

Le nombre de décès dans l'intervalle terminal est égal au nombre de survivants à l'âge ω (début de l'intervalle terminal), $\Rightarrow$ $_{\infty}\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{\omega}}$;

$$_{\infty}L_{\omega} = \frac{S_{\omega}}{_{\infty}M_{\omega}}$$

où $_{\infty}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\omega}}$ – le taux (centré) de mortalité observée et
$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{\omega}}$ – provient de la table de mortalité

Sinon, sachant que la durée d'attente d'un éventement est inverse à sa probabilité, on peut déduire que

$$e_{\omega} = \frac{1}{_{\infty}M_{\omega}} \rightarrow {}_{\infty}L_n = e_{\omega} \times S_{\omega}$$

Algorithme de la construction № 1 (« directe »)

Données : 1) Population par âge et par sexe au 1 janvier de deux années consécutives
2) Décès par âge et par sexe (répartis entre les triangles, sinon → hypothèse sur la répartition)
3) Décès des enfants de < 1 an répartis par sexe et par durée de vie (sinon → modèle)
4) Migration = 0 (sinon il faut ajuster le dénominateur d'une fraction du SM spécifique à l'âge)

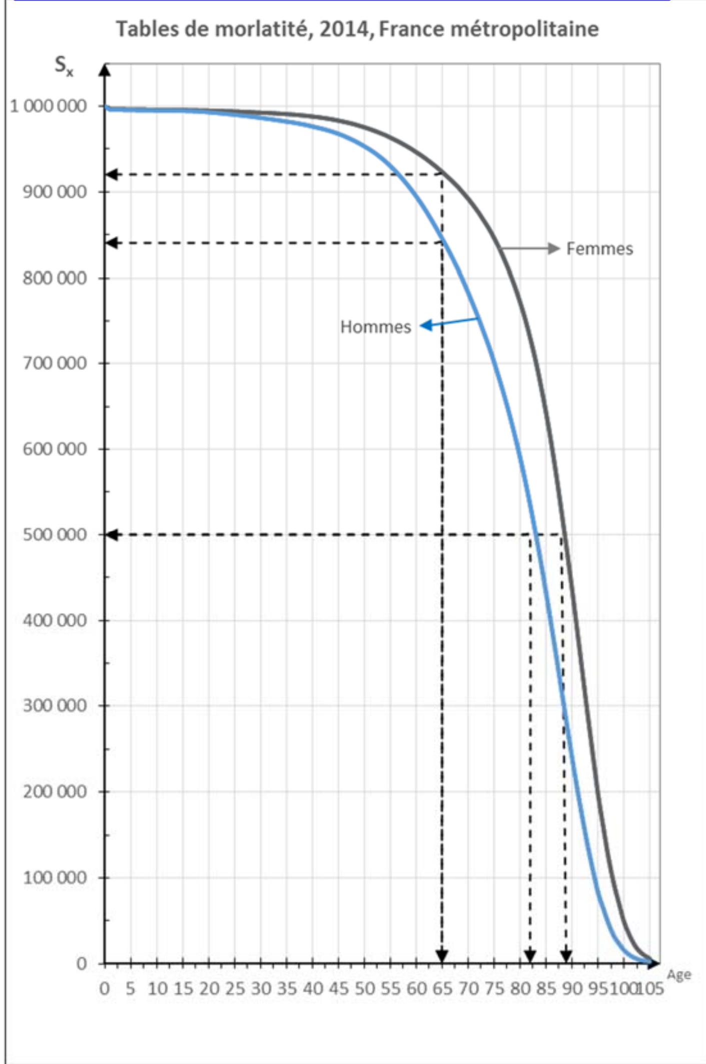
$$ {}_n p_x = \left(\frac{P_{x,t+1}}{P_{x,t+1} + D'_{x,t}} \right) \cdot \left(\frac{P_{x,t} - D''_{x,t}}{P_{x,t}} \right) $$

Calculs : ${}_n p_x$ → S_x → ${}_n d_x$ etc… → e_x

Nota: toujours la racine de table, $S_0 = 1\cdot 10^n$; avec $n \in \mathbb{Z} \geq 0$

	France (métro) 2014												
	Hommes	Hommes	Homme	Homme	Homme	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes
Age	Pop 1.1.14	Pop 1.1.15	D'	D''	$_1p_x$	S_x	$_1q_x$	$_1d_x$	$_1a_x$	$_1L_x$	$_1m_x$	T_x	e_x
0	385 670	384 840	1 287	159	0.9963	1 000 000	0.003744	3 744	0.125	996 724	0.003756	79 278 436	79.28
1	390 569	387 297	59	52	0.9997	996 256	0.00028543	284	0.5	996 114	0.000285	78 281 712	78.58
2	392 386	391 851	32	28	0.9998	995 972	0.00015301	152	0.5	995 895	0.000153	77 285 598	77.60
3	404 210	395 768	31	21	0.9999	995 819	0.00013027	130	0.5	995 754	0.000130	76 289 703	76.61
4	404 007	408 248	24	24	0.9999	995 690	0.00011819	118	0.5	995 631	0.000118	75 293 948	75.62
5	406 201	407 031	23	17	0.9999	995 572	9.8352E-05	98	0.5	995 523	0.000098	74 298 318	74.63
6	404 561	409 135	23	15	0.9999	995 474	9.3288E-05	93	0.5	995 427	0.000093	73 302 795	73.64
7	411 728	406 590	21	19	0.9999	995 381	9.7791E-05	97	0.5	995 332	0.000098	72 307 367	72.64
8	403 602	414 271	16	14	0.9999	995 284	7.3307E-05	73	0.5	995 247	0.000073	71 312 035	71.65
9	401 499	405 865	14	21	0.9999	995 211	8.6795E-05	86	0.5	995 168	0.000087	70 316 788	70.66
10	399 857	403 488	15	9	0.9999	995 124	5.9682E-05	59	0.5	995 095	0.000060	69 321 620	69.66

	France (métro) 2014												
	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes
Age	Pop 1.1.14	Pop 1.1.15	D'	D''	$_1p_x$	S_x	$_1q_x$	$_1d_x$	$_1a_x$	$_1L_x$	$_1m_x$	T_x	e_x
0	367 577	368 054	996	156	0.9969	1 000 000	0.00312208	3 122	0.110	997 221	0.003131	85 413 459	85.41
1	370 608	368 557	51	47	0.9997	996 878	0.00026516	264	0.5	996 746	0.000265	84 416 237	84.68
2	376 860	372 349	34	29	0.9998	996 614	0.00016825	168	0.5	996 530	0.000168	83 419 492	83.70
3	385 558	379 472	20	14	0.9999	996 446	8.9011E-05	89	0.5	996 402	0.000089	82 422 962	82.72
4	384 777	388 768	13	12	0.9999	996 357	6.4624E-05	64	0.5	996 325	0.000065	81 426 560	81.72
5	387 207	387 075	16	11	0.9999	996 293	6.9741E-05	69	0.5	996 258	0.000070	80 430 235	80.73
6	386 264	389 969	11	17	0.9999	996 223	7.2217E-05	72	0.5	996 187	0.000072	79 433 977	79.74
7	392 717	388 572	11	15	0.9999	996 151	6.6502E-05	66	0.5	996 118	0.000067	78 437 790	78.74
8	384 837	394 839	21	12	0.9999	996 085	8.4364E-05	84	0.5	996 043	0.000084	77 441 672	77.75
9	383 154	386 613	11	15	0.9999	996 001	6.7599E-05	67	0.5	995 967	0.000068	76 445 628	76.75
10	381 395	385 135	9	14	0.9999	995 934	6.0074E-05	60	0.5	995 904	0.000060	75 449 661	75.76



Défaut :

sur chaque intervalle la fonction ***S(x)*** supposée être droite (linéaire), dont la fonction de décès d(x) est sous-estimée entre et surestimée avant et après les points d'inflexion de la fonction de survie S(x)

Algorithme de la construction № 2 (« exponentielle »)

Données :

1) population par âge et par sexe au 1 janvier de deux années consécutives
2) Décès par âge et par sexe
3) Décès des enfants de < 1 an répartis par sexe et par durée de vie (sinon → modèle ou rien)

Hypothèse :

1) Taux de mortalité observés = taux de mortalité de table ${}_nM_x = {}_nm_x$
2) Population est exponentielle sur chaque intervalle x, x+n (i.e. la densité du risque de décès est uniforme sur l'intervalle)

Modèle : $S_{x+n} = S_x \cdot e^{-{}_nM_x \cdot n}$

$$ {}_nq_x = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x} $$

$$ {}_nL_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nM_x} = \frac{S_x - S_{x+n}}{{}_nM_x} $$

$$ {}_nL_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{\ln S_x - \ln S_{x+n}} \cdot n $$

Défaut :
sur chaque intervalle S(x) supposée être concave, dont la fonction de décès d(x) est sous-estimée entre les points d'inflexion de la fonction de survie S(x)

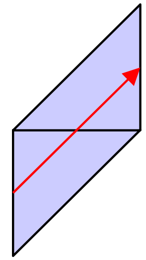
Séquence de calculs : ${}_nM_x \rightarrow S_x \rightarrow {}_nL_x \rightarrow T_x \rightarrow e_x$

	France (métro) 2014 : Données					Tables de mortalité (modèle)					
	Hommes	Hommes	Hommes		Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes
Age	Pop 1.1.14	Pop 1.1.15	D'	D''	${}_1M_x$	S_x	${}_1L_x$	T_x	e_x	${}_1q_x$	${}_1d_x$
0	385 670	384 840	1 287	159	0.0038	1 000 000	998 126	79 280 501	79.28	0.0037463	3 746
1	390 569	387 297	59	52	0.0003	996 254	996 112	78 282 375	78.58	0.0002854	284
2	392 386	391 851	32	28	0.0002	995 969	995 893	77 286 264	77.60	0.0001530	152
3	404 210	395 768	31	21	0.0001	995 817	995 752	76 290 370	76.61	0.0001300	129
4	404 007	408 248	24	24	0.0001	995 688	995 629	75 294 618	75.62	0.0001182	118
5	406 201	407 031	23	17	1E-04	995 570	995 521	74 298 989	74.63	0.0000984	98

	France (métro) 2014										
	Femmes	Femmes	Femmes		Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes
Age	Pop 1.1.14	Pop 1.1.15	D'	D''	${}_1M_x$	S_x	${}_1L_x$	T_x	e_x	${}_1q_x$	${}_1d_x$
0	367 577	368 054	996	156	0.0031	1 000 000	998 436	85 423 614	85.42	0.0031271	3 127
1	370 608	368 557	51	47	0.0003	996 873	996 741	84 425 178	84.69	0.0002651	264
2	376 860	372 349	34	29	0.0002	996 609	996 525	83 428 437	83.71	0.0001682	168
3	385 558	379 472	20	14	9E-05	996 441	996 397	82 431 912	82.73	0.0000889	89
4	384 777	388 768	13	12	6E-05	996 352	996 320	81 435 516	81.73	0.0000646	64
5	387 207	387 075	16	11	7E-05	996 288	996 253	80 439 196	80.74	0.0000697	69

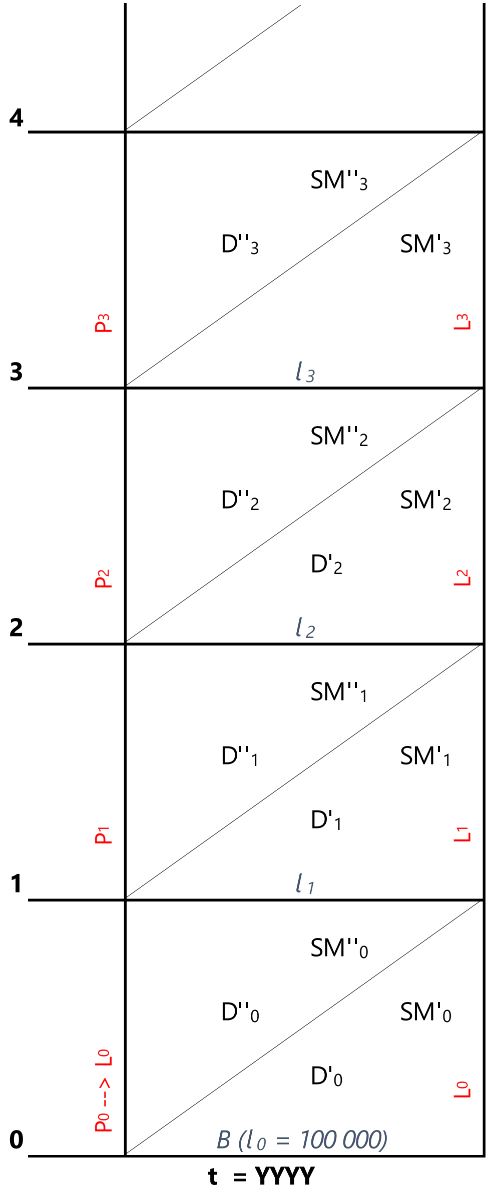
Algorithme № 3 (INSEE / quotients perspectifs) :

calculs des tables annuelles de moralité en France (particularités)



- Tables sont calculées *à partir des quotients perspectifs de survie des générations* *($v^{L}_{x,x+1}$ ou les quotients de translation)* par année de naissance au cours *de l'année de référence de la table de mortalité*
- Les quotients de survie sont les compléments à 1 des quotients de mortalité (attrition à cause des décès) des générations par année de naissance ajustés à la migration (sachant que l'effectif varie *à cause des décès* et *à cause de la migration* conjointement)
- Calculs s'appuient sur les effectifs de la population au début de l'année (au 1 janvier) classés par année d'âge et par sexe
- Pour estimer l'effectif de la population exposée au risque de décès on fait le recours à la statistique de migration (solde migratoire) classée par année de naissance (*l'âge atteint* dans l'année = type « génération – période ») et par sexe des migrants
- Les décès enregistrés au cours de l'année de référence sont classés par sexe, par âge et par année de naissance des décédés (groupés par triangles ou les ensembles élémentaires du diagramme de Lexis)
- L'objectif est d'estimer pour chaque génération ***x*** le ratio de survie entre le début et la fin d'année : $\frac{P'_{x+1,t+1}}{P'_{x,t}} = v_{x,t} = \frac{L_{x+1}}{L_x}$ (où $P'_{x,t}$ l'effectif de la population ajusté à la migration)
- Estimation de la variable basique de la table (l_x ou S_x) se fait comme une moyenne de L_{x-1} et L_x pondérées par les parts de décès dans le triangle supérieur à l'âge x-1 et le triangle inférieur à l'âge x

Algorithme de calculs et données pour la table de mortalité annuelle et triennale en France



1. Calculer la probabilité (quotient) de survie durant l'année pour les âges > 1 ($v^L_{x,x+1}$)

   Données :

   - population par âge et par sexe au 1 janvier (*tableau T6*) = P_x
   - décès classés par sexe, âge et par année de naissance (T73) = $D^a_x = D''_x + D'_{x+1}$
   - solde migratoire par âge atteint dans l'année (SM^a_x) ou bien par âge et par année de naissance

$$v^L_{x,x+1} = \frac{{}_nL_{x+n}}{{}_nL_x} = \frac{P_{x+1,t+1}}{P_{x,t} + 0,5 \cdot SM^a_x} = 1 - \frac{D''_x + D'_{x+1}}{P_{x,t} + 0,5 \cdot SM^a_x}$$

→ un complément à 1 du quotient d'attrition

2. Calculer la probabilité pour un nouveau-né de survivre de la naissance au 1er janvier

   Données :

   - nombre de naissances déclarées vivantes par sexe (T35) pour l'année précédente
   - décès classés par âge et par année de naissance (T77)

$$v^L_0 = 1 - \frac{D'_0}{B + 0,5 \cdot SM^R_0}$$

3. Calculer population de table par âge révolu = ${}_nL_x$ *soit n = 1* à partir de l'âge 0 supposant que le nombre de naissances = 100 000

$${}_1L_0 = 100\,000 \cdot v^L_0 \quad \text{et} \quad {}_1L_{x+1} = {}_1L_x \cdot v^L_{x,x+1}$$

4. Calculer la probabilité de survie de la naissance à l'anniversaire où à l'âge exacte x (l_x) supposant que l_0 = 100 000 (S_0 = *100 000*)

$$l_x = {}_1L_{x-1} - \frac{D''_x}{D''_x + D'_{x+1}} \cdot \left({}_1L_{x-1} - {}_1L_x\right) \qquad l_x = {}_1L_{x-1}\left(1 - \frac{D''_x}{D''_x + D'_{x+1}}\right) + \frac{D''_x}{D''_x + D'_{x+1}} \cdot {}_1L_x$$

5. Table de mortalité triennale se fabrique à partir de quotients de survie étant une moyenne arithmétique des trois quotients annuels

<u>Défaut :</u> le même que l'algorithme 1

Algorithme № 4 (méthode dite « actuarielle ») : conversion des taux en quotients

Soit $_1m_x^*$ les taux de mortalité à l'âge « *x* » observés dans une population, et qu'ils soient à peu près égaux aux taux de mortalité de table ce qui s'écrit :

$$_1m_x^* = {}_1m_x = \frac{_1d_x}{_1L_x} \qquad (1)$$

Si la variation de survie sur un intervalle d'âge est linéaire → $_1L_x = 0{,}5 \cdot (S_x + S_{x+1})$ (2)

on peut réécrire équation (1) → $_1m_x^* = \dfrac{_1d_x}{0{,}5 \cdot (S_x + S_{x+1})}$ (3)

et en divisant le numérateur et le dénominateur de l'équation (3) par S_x on obtient

la formule de conversion d'un quotient en taux pour : $_1m_x^* = \dfrac{2 \cdot {}_1q_x}{1 + {}_1p_x} = \dfrac{2 \cdot {}_1q_x}{2 - {}_1q_x}$ (4)

et celle de conversion des taux en quotients : $_1q_x = \dfrac{2 \cdot {}_1m_x}{2 + {}_1m_x}$ (5)

On utilise ensuite l'équation (5) pour démarrer la construction d'une table de mortalité à partir des taux de mortalité fournis par la statistique démographique…

La démonstration alternative : $_nq_x = \dfrac{_nd_x}{S_x} = \dfrac{_nm_x \cdot {}_nL_x}{S_x} = \dfrac{_nm_x \cdot n \cdot (2 \cdot S_x - S_x \cdot {}_nq_x)}{2 \cdot S_x} = \dfrac{2 \cdot {}_nm_x \cdot n - {}_nm_x \cdot n \cdot {}_nq_x}{2} \rightarrow {}_nq_x = \dfrac{2 \cdot n \cdot {}_nm_x}{2 + n \cdot {}_nm_x}$

Exercice pour autocontrôle : présenter les formules pour $_nm_x$ et $_nq_x$ sur le diagramme de Lexis

Précision de la formule de conversion de ${}_nm_x$ en ${}_nq_x$ pour les intervalles d'âge pluriannuels (« formule de Chiang »)

$${}_nL_x = n \cdot S_{x+n} + {}_na_x \cdot {}_nd_x$$

où ${}_na_x$ – nombre moyen d'années vécues par les décédés entre âge x et $x+n$

$${}_nL_x = n \cdot (S_x - {}_nd_x) + {}_na_x \cdot {}_nd_x \Rightarrow \qquad n \cdot S_x = {}_nL_x + n \cdot {}_nd_x - {}_na_x \cdot {}_nd_x \Rightarrow$$

$$S_x = \frac{1}{n} \cdot [{}_nL_x + (n - {}_na_x) \cdot {}_nd_x]$$

Par définition $${}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{S_x} = \frac{n \cdot {}_nd_x}{{}_nL_x + (n - {}_na_x) \cdot {}_nd_x}$$

$${}_nq_x = \frac{n \cdot \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x}}{\frac{{}_nL_x}{{}_nL_x} + (n - {}_na_x) \cdot \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x}} \Rightarrow$$

$$\boxed{{}_nq_x = \frac{n \cdot {}_nm_x}{1 + (n - {}_na_x) \cdot {}_nm_x}}$$

Donc, la conversion des taux en probabilité ne dépend que de « ${}_na_x$ »

Greville T.N.E "Short Methods of Construction Life Tables" *Records from the American Institute of Actuaries,* 1943, vol. 32, part. 1, n° 65, juin 1943, p.29-42

Chiang C.L. *An Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics.* N.Y., Wiley 1968

Relations entre la formule « actuarielle », la formule de Chiang et la loi exponentielle de la mortalité

$$ {}_nq_x = \frac{n \cdot {}_nm_x}{1 + (n - {}_na_x) \cdot {}_nm_x} $$

Quelle est la distribution des décès à l'intérieur de l'intervalle $\boldsymbol{x, x+1}$:
linéaire, exponentielle (ou autre) ?

1. Distribution linéaire de $S(x) \rightarrow S'(x) = k$

$$ {}_n\bar{a}_x = \frac{n}{2} \longrightarrow {}_nq_x = \frac{n \cdot {}_nm_x}{1 + \left(n - \frac{n}{2}\right) \cdot {}_nm_x} = \frac{n \cdot {}_nm_x}{1 + \frac{n}{2} \cdot {}_nm_x} \rightarrow {}_nq_x = \frac{2 \cdot n \cdot {}_nm_x}{2 + n \cdot {}_nm_x} $$

on obtient **la formule** usuelle que Y. Péron (1971) appelle « **actuarielle** »

2. Distribution exponentielle de $S(x)$: on n'a pas besoin de ${}_na_x$ *qui se calcule à l'intérieur du modèle*

Si ${}_nm_x$ est **constant** (densité uniforme) sur un intervalle $\boldsymbol{x, x+n}$ et ${}_nq_x = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x} \Rightarrow$

$$ {}_nq_x = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x} = 1 - \frac{S_x \cdot e^{-n \cdot {}_nm_x}}{S_x} \Rightarrow {}_nq_x = 1 - e^{-n \cdot {}_nm_x} $$

et ${}_np_x = e^{-n \cdot {}_nm_x} \rightarrow S_x = e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$

Lecture: Yves Péron, « La construction de tables de mortalité abrégées : Comparaison de trois méthodes usuelles » // *Population*, 26e année, n°6, 1971 pp. 1125-1130

Espérance de vie à l'âge atteint et « le paradoxe » de la mortalité infantile ($e_0 < e_1$)

Par définition la durée moyenne de vie d'un nouveau-né $e_0 = \int_0^{\omega} S(x)dx = \sum_{x=0}^{\omega} {}_nL_x$ (si $S_0 = 1$).

Pour ceux qui ont survécus jusqu'à l'âge ***X***, la durée moyenne de vie sera composée de ***X*** années déjà vécues, + ***e**$_x$* (espérance de vie après l'âge X) : $e_{0|x} = x + e_x \rightarrow e_x = \int_x^{\omega} S(x)dx \simeq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} L_x}{S_x} = \frac{T_x}{S_x}$

On peut donc facilement trouver un rapport récurrent entre e_x et e_{x+1}

Sachant que $T_{x+n} = T_x - {}_nL_x = e_x \cdot S_x - {}_nL_x$ on exprime $e_{x+n} = \frac{e_x \cdot S_x - {}_nL_x}{S_{x+n}} = \frac{e_x \cdot S_x - {}_nL_x}{S_x \cdot {}_np_x} = \frac{e_x - \frac{{}_nL_x}{S_x}}{{}_np_x}$

Avec le passage de l'âge X à X+1 l'espérance de vie diminue **de *moins d'un an*** puisque la durée de vie des individus décédés dans cet intervalle était forcément plus faible que celle de survivants. Par conséquent il se peut que ***e**$_{x+1}$* soit supérieure à ***e**$_x$* c'est ce qu'on observe souvent dans les âges de première enfance.

$$e_{x+n} - e_x = \frac{{}_nq_x \cdot e_x - \frac{{}_nL_x}{S_x}}{{}_np_x}$$

normalement < 0, puisque ${}_n\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{x}}$ est trop petite et ${}_n\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}/\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}}$ est proche à 1

cependant pour $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (entre la naissance et le premier anniversaire),

$$e_1 - e_0 = \frac{{}_1q_0 \cdot e_0 - {}_1L_0}{{}_1p_0} > 0 \quad \text{si} \quad {}_1q_0 > \frac{{}_1L_0}{e_0}$$

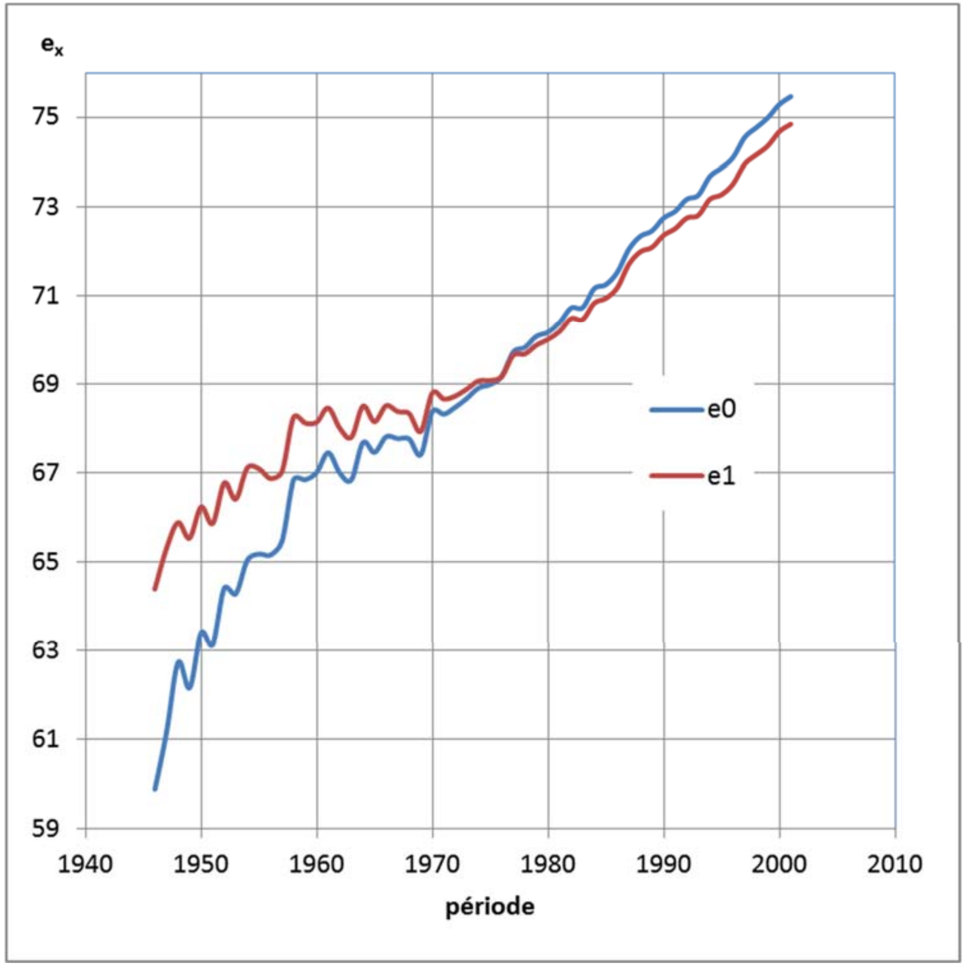
et surtout si ${}_1q_0 > \frac{1}{e_0}$ où $1/e_0$ est TBM de la population stationnaire **(voir Annexe avec les démonstrations)**

Donc, dans les populations où la **mortalité infantile** est **supérieure** au **taux brut de mortalité** <u>**de table**</u> ($TBM_{tm} = 1/e_0$), $\boldsymbol{e_1} > \boldsymbol{e_0}$.

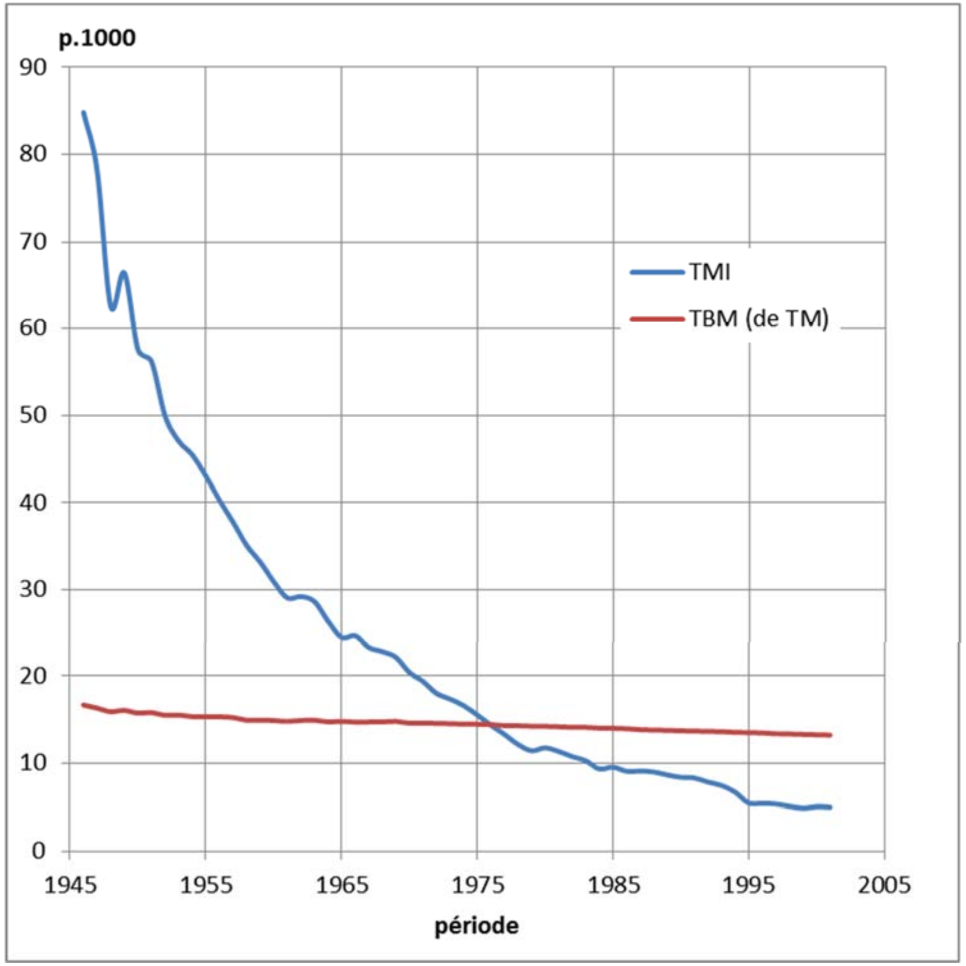
C'est un phénomène qu'on appelle parfois « le paradoxe de la mortalité infantile »

« Paradoxe de la mortalité infantile » en France

Espérance de vie à la naissance et à l'âge exacte d'un an



Taux de mortalité infantile (TMI) et taux brut de mortalité (TBM) de table



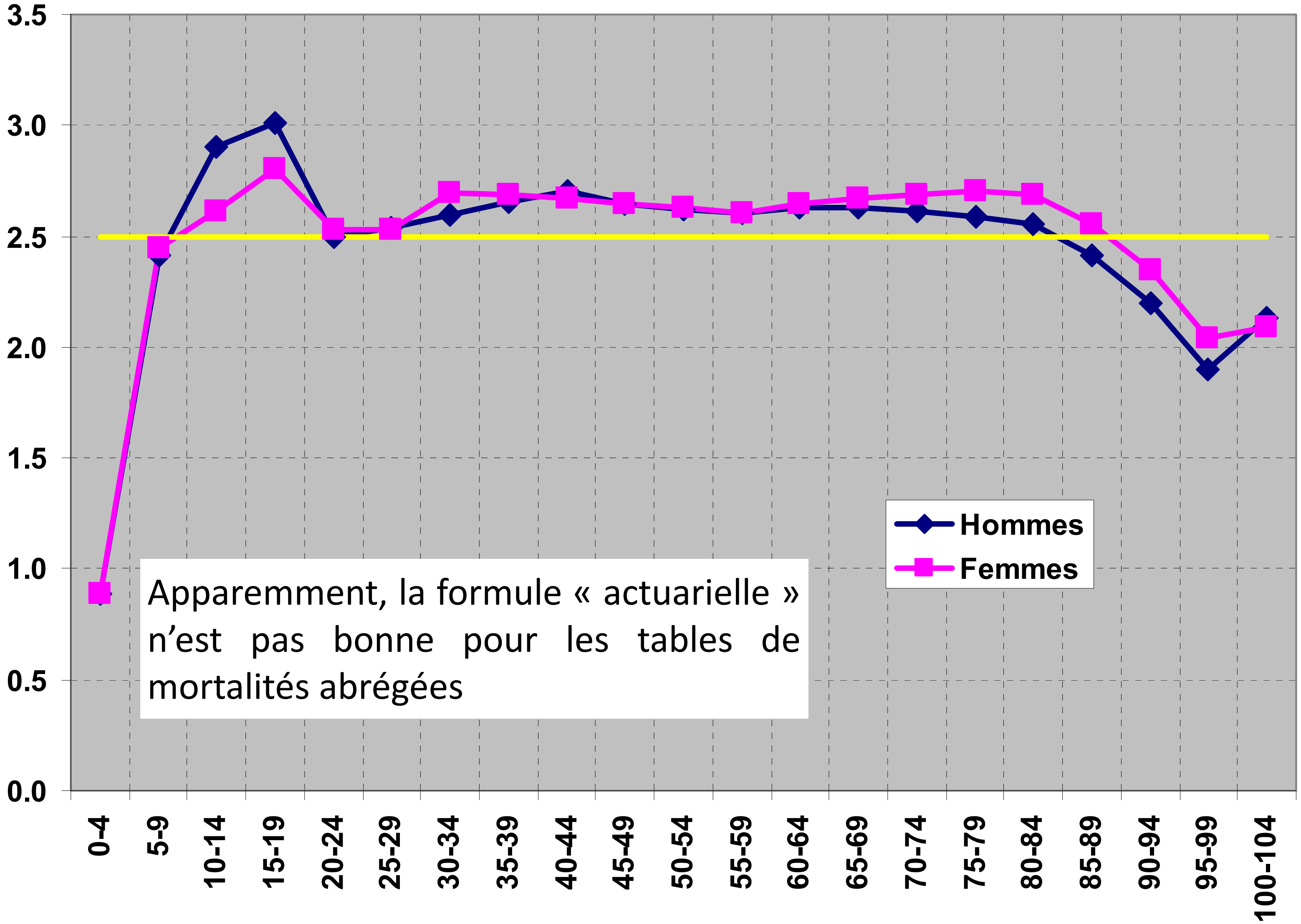
Depuis 1976 TMI < TBM

$$TMI = \frac{{}_1d_0}{S_0}$$

$$TBM = \frac{1}{e_0}$$

Problème de construction des tables de mortalités abrégées

Nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge par les décédés dans cet intervalle d'âge selon le sexe. ***France, table de mortalité 2000-2002***



Méthodes et hypothèses d'estimation ${}_nq_x$ pour construire une table abrégée de la mortalité

1. Observation directe : si les données individuelles sur l'âge exacte au décès sont disponibles (une situation rare), on peut en facilement déduire ${}_n\boldsymbol{a}_x$ à partir des dates exactes de naissance et de décès de chaque individu (s'il s'agit d'observation des décès et de survie, on estime directement $\boldsymbol{S}_x$)

2. Tables empiriques (ou presque) et formule de ***Reed et Merrell*** établies à partir des tables de mortalité complètes des États-Unis pour 1910, 1920 et 1930, : ${}_n\boldsymbol{q}_x = \mathbf{1} - \boldsymbol{exp}(-\boldsymbol{n} \cdot {}_n\boldsymbol{m}_x - \mathbf{0{,}008} \cdot \boldsymbol{n}^3 \cdot {}_n\boldsymbol{m}_x)$ en y ajoutant un « dispositif de freinage » (cf. L. J. Reed et M. Merrell : « A short method for constructing an abridged life table » // *The American Journal of Hygiene*, vol. 30, n° 2, sept. 1939, p.33-62; reprinted p.43-51, dans D.Smith and N.Keifitz, eds., *Mathematical Demography*, NY, Springer Verlag, 1977).

3. A partir de l'hypothèse de ***Greville*** sur le **rapport log-linéaire** entre ${}_n\boldsymbol{m}_x$ et l'âge ***(x)*** conformément à la loi de Gomperz pour les ages de plus de 30 ans (cf. Greville, 1943, voir Thème "Tables multiples" diapositive n°27)

$$ {}_nq_x = \frac{{}_nm_x}{1 - {}_nm_x \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{n}{12} \cdot \left({}_nm_x - \ln c\right)\right]} $$

4. A partir de l'hypothèse de ***Keyfitz*** sur la distribution polynomiale de 2[d] degré : (cf N.Keyfitz « A Life Table that Agrees with Data », // *Journal of American Statistical Association*, 1966, vol. 61, n° 314, p.305-312).

$$ {}_na_x^i = \frac{-\frac{n}{24} \cdot {}_nd_{x-5} + \frac{n}{2} \cdot {}_nd_x + \frac{n}{24} \cdot {}_nd_{x+5}}{{}_nd_x} $$

5. A partir de l'hypothèse de ***Keyfitz et Frauenthal*** sur la linéarité de la distribution de ${}_nm_x$ entre les âges x-n et x+2n : (Keiftz N., J.Frauenthal, «An Improved Life Table Method», // *Biometrics*, 1975, vol.31, no 4, p.889-899.

$$ {}_np_x = \exp\left[-n \cdot {}_nM_x - \frac{n}{48 \cdot {}_nN_x} \cdot \left({}_nN_{x-n} - {}_nN_{x+n}\right) \cdot \left({}_nM_{x-n} - {}_nM_{x+n}\right)\right] $$

${}_nM_x$ – taux observés
${}_nN_x$ – population âgée de x à $x+n$

6. Sinon on peut toujours imaginer que tout le monde meurt juste au milieu de l'intervalle d'âge et par conséquent ➔ ${}_na_x = 0{,}5 \cdot n$

Lecture: Yves Péron, « La construction de tables de mortalité abrégées : Comparaison de trois méthodes usuelles » // *Population*, 26e année, n°6, 1971 pp. 1125-1130

Méthodes et hypothèses d'estimation ${}_nq_x$ pour construire une table abrégée de la mortalité

1. Observation directe : si les données individuelles sur l'âge exacte au décès sont disponibles (une situation rare), on peut en facilement déduire ${}_n\boldsymbol{a}_x$ à partir des dates exactes de naissance et de décès de chaque individu (s'il s'agit d'observation des décès et de survie, on estime directement $\boldsymbol{S}_x$)

2. Tables empiriques (ou presque) et formule de ***Reed et Merrell*** établies à partir des tables de mortalité complètes des États-Unis pour 1910, 1920 et 1930 : ${}_n\boldsymbol{q}_x = \mathbf{1} - \boldsymbol{exp}(-\boldsymbol{n} \cdot {}_n\boldsymbol{m}_x - \mathbf{0,008} \cdot \boldsymbol{n}^3 \cdot {}_n\boldsymbol{m}_x)$ en y ajoutant un « dispositif de freinage » (cf. L. J. Reed et M. Merrell : « A short method for constructing an abridged life table » // *The American Journal of Hygiene*, vol. 30, n° 2, sept. 1939, p.33-62; reprinted p.43-51, dans D.Smith and N.Keifitz, eds., *Mathematical Demography*, NY, Springer Verlag, 1977).

3. A partir de l'hypothèse de ***Greville*** sur le ***rapport log-linéaire*** entre ${}_n\boldsymbol{m}_x$ et l'âge $(\boldsymbol{x})$ conformément à la loi de Gomperz pour les ages de plus de 30 ans (cf. Greville, 1943, voir Thème "Tables multiples" diapositive n°27)

$$\rightarrow {}_nq_x = \frac{{}_nm_x}{1 - {}_nm_x \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{n}{12} \cdot \left({}_nm_x - \ln c\right)\right]}$$

4. A partir de l'hypothèse de ***Keyfitz*** que la distribution de décès de table sur l'intervalle d'âge entre $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{n}$ **et** $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$ suit ***la loi polynomiale de 2^d^ degré*** $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^2$ d'où peut-on déduire une formule suivant pour ${}_na_x$ (cf N.Keyfitz « A Life Table that Agrees with Data », // *Journal of American Statistical Association*, 1966, vol. 61, n° 314, p.305-312).

$$\rightarrow {}_na_x^i = \frac{-\frac{n}{24} \cdot {}_nd_{x-5} + \frac{n}{2} \cdot {}_nd_x + \frac{n}{24} \cdot {}_nd_{x+5}}{{}_nd_x}$$

5. A partir de l'hypothèse de ***Keyfitz et Frauenthal*** sur la linéarité de la distribution de ${}_nm_x$ entre les âges $x - n$ et $x + 2n$:

$$ {}_np_x = \exp\left[-n \cdot {}_nM_x - \frac{n}{48 \cdot {}_nN_x} \cdot \left({}_nN_{x-n} - {}_nN_{x+n}\right) \cdot \left({}_nM_{x-n} - {}_nM_{x+n}\right)\right]$$

${}_nM_x$ – taux observés
${}_nN_x$ – population âgée de x à $x + n$

(Keiftz N., J.Fraunthal, «An Improved Life Table Method», // *Biometrics*, 1975, vol.31, no 4, p.889-899.

6. Sinon on peut toujours imaginer que ${}_n\boldsymbol{a}_x = \mathbf{0,5} \cdot \boldsymbol{n}$ ou se passer de ${}_na_x$ en faisant le recours à l'hypothèse exponentielle ${}_n\boldsymbol{p}_x = \mathbf{1} - {}_n\boldsymbol{q}_x = \mathbf{1} - \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{n} \cdot {}_n\boldsymbol{m}_x}$, bien que cette approche comporte implicitement une estimation pour ${}_na_x$ qui est systématiquement inférieure à $\boldsymbol{n}/\mathbf{2}$:

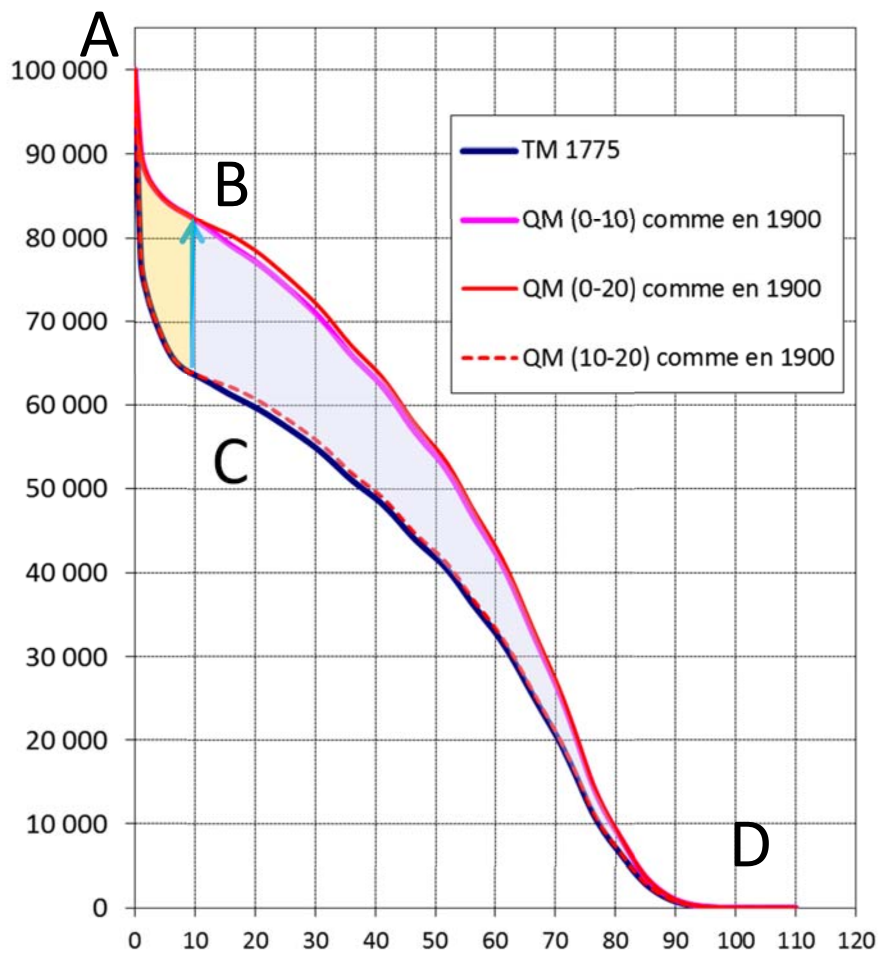
$$ {}_na_x = n + \frac{1}{{}_nm_x} - \frac{n}{{}_nq_x} = n + \frac{1}{{}_nm_x} - \frac{n}{1 - e^{-n \cdot {}_nm_x}} < \frac{n}{2}$$

Lecture : Yves Péron, « La construction de tables de mortalité abrégées : Comparaison de trois méthodes usuelles » // *Population*, 26e année, n°6, 1971 pp. 1125-1130

Analyse des gains de la durée de vie à cause de la baisse de la mortalité par âge

Comparons la mortalité suédoise de 1751 avec celle de 1900.

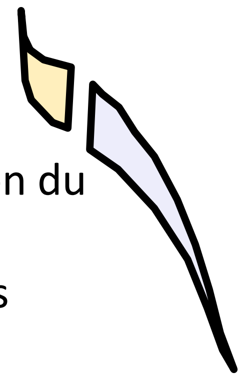
Quel gain de l'espérance de vie et pourquoi ?



Soit
il ne change que la survie jusqu'à l'âge de 10 ans;

et puisque par définition l'espérance de vie = $e_0 = \dfrac{\int_0^{\omega} S(x)dx}{S(0)}$

le gain total sera égal à
la surface ABC
(gain direct à cause de l'augmentation de survie dans l'intervalle d'âge 0-10 ans)
+
la surface BDC
(gain « indirect » à cause de l'augmentation du nombre de survivants à l'âge 10 et par conséquent une augmentation des années vécues après l'âge de 10 ans, ou un effet d'interaction)



On voit que la baisse de la mortalité sur l'intervalle d'âge entre 10 et 20 ans ne contribue que peu dans le gain total de l'espérance de vie entre 1751 et 1900

Principes de décomposition d'une différence entre deux e_0

Entre 1816 (table A) et 2010 (table B) les femmes françaises ont gagné 43,65 ans de vie.

Comment quantifier la contribution de la variation de mortalité par tranche d'âge à ce gain ?

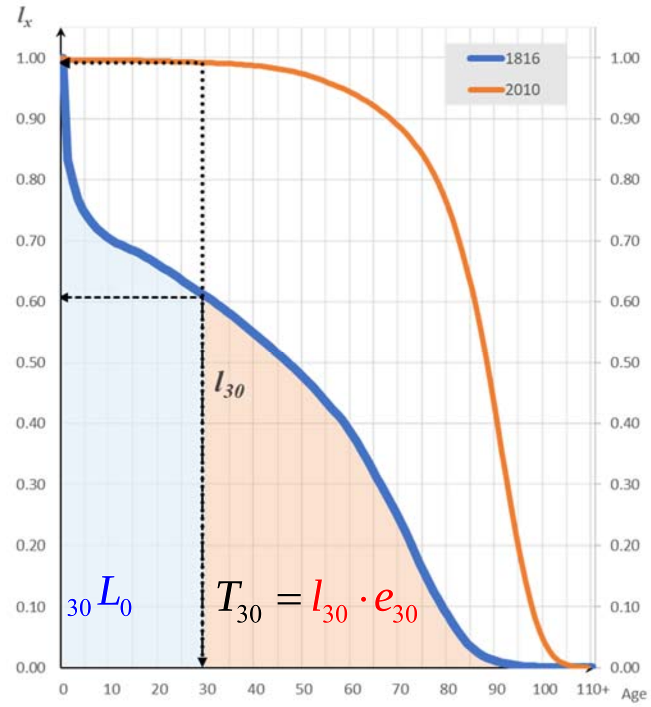
Soit $l_0 = 1$ (racine de table) pour simplifier la présentation et $e_x = \frac{T_x}{l_x}$

Choisissons un intervalle d'âge entre 0 et 30 ans exacte

$$e_0 = {}_{30}L_0 + T_{30} = {}_{30}L_0 + l_{30} \cdot e_{30}$$

${}_{30}L_0$ ne dépend ***que*** de la mortalité sur l'intervalle d'âge choisi (0-30 ans)

T_{30} dépend de la mortalité sur l'intervalle d'âge 0-30 ans (l_{30}) et de la mortalité après l'âge de 30 ans (e_{30})



Mortalite\ASMR France 1816 et 2010.xlsx

La contribution de la variation (baisse) de mortalité (CVM) des âges 30+ à la différence entre les deux e_0 s'exprime donc comme suit :

$$\Delta_{30+}^{B-A} = e_{30}^{B} - e_{0|30}^{A} = l_{30}^{B} \cdot e_{30}^{B} - l_{30}^{B} \cdot e_{30}^{A} = l_{30}^{B}(e_{30}^{B} - e_{30}^{A})$$

tout court : $\Delta_{30+}^{B-A} = l_{30}^{B}(e_{30}^{B} - e_{30}^{A})$

La CVM sur un intervalle 30-35 ans est alors : ${}_5\Delta_{30}^{B-A} = l_{30}^{B}(e_{30}^{B} - e_{30}^{A}) - l_{35}^{B}(e_{35}^{B} - e_{35}^{A})$

la totalité de la différence est composée des contributions partielles $e_0^B - e_0^A = \Delta e_0^{B-A} = \sum_{x=0}^{\omega-n} {}_n\Delta_x^{B-A}$

Pour la différence entre tables A et B: ${}_5\Delta_{30}^{A-B} = l_{30}^{A}(e_{30}^{A} - e_{30}^{B}) - l_{35}^{A}(e_{35}^{A} - e_{35}^{B})$ $\rightarrow \Delta e_0^{A-B} = \sum_{x=0}^{\omega-n} {}_n\Delta_x^{A-B}$

Puisque $\Delta e_0^{A-B} \neq \Delta e_0^{B-A}$ on estime la vraie différence comme une moyenne de deux $\Delta e_0^{A/B} = 0{,}5 \cdot \left(\Delta e_0^{B-A} - \Delta e_0^{A-B}\right)$

Les formules plus fréquemment utilisées pour la décomposition de la différence entre deux espérances de vie

<u>**Première solution a été proposée en 1968:**</u>

Iu.A. Kortchak-Tchepourkovski, publication de 1968 (avec une faute d'impression) et en 1987 en version correcte, utilisée par l'INSEE (voir INSEE, *Résultats. Société*, 2008, N°84: Beaumel C., Vatan M., 2008a, « La situation démographique en 2006 » et la diapositive suivante)

<u>**Cette solution a été indépendamment développée par**</u>

E.ANDREEV (1982)« Méthode de composants dans l'analyse de l'espérance de vie » // *Vestnik Statistiki*,1982, № 9. P. 42-48 (en russe);

J.POLLARD (1982) "The expectation of life and its relationship to mortality"// *Journal of the Institute of Actuaries*, 109(2), 225-240 (September);

R.PRESSAT (1985) « Contribution des écarts de mortalité par âge à la différence des vies moyennes » // *Population* (French Edition), 2 40[e] année, No. 4/5. (Jul. - Oct., 1985), pp. 766-770.

$$ {}_n\Delta_x = \frac{0.5\cdot\left(l_x^{tm1}+l_x^{tm2}\right)}{l_0}\cdot\left(e_x^{tm2}-e_x^{tm1}\right)-\frac{0.5\cdot\left(l_{x+n}^{tm1}+l_{x+n}^{tm2}\right)}{l_0}\cdot\left(e_{x+n}^{tm2}-e_{x+n}^{tm1}\right) $$

$$ \boxed{e_0^{tm2}-e_0^{tm1}=\sum_{x=0}^{\omega}{}_n\Delta_x} $$

où ***tm1*** et ***tm2*** sont deux tables de mortalité à comparer

<u>**Une autre solution similaire (formule d'Arriaga) :**</u>

Eduardo ARRIAGA (1984) "Measuring and Explaining the Change in Life Expectancy", *Demography,* 1984, vol.21, no.2, p.83-96

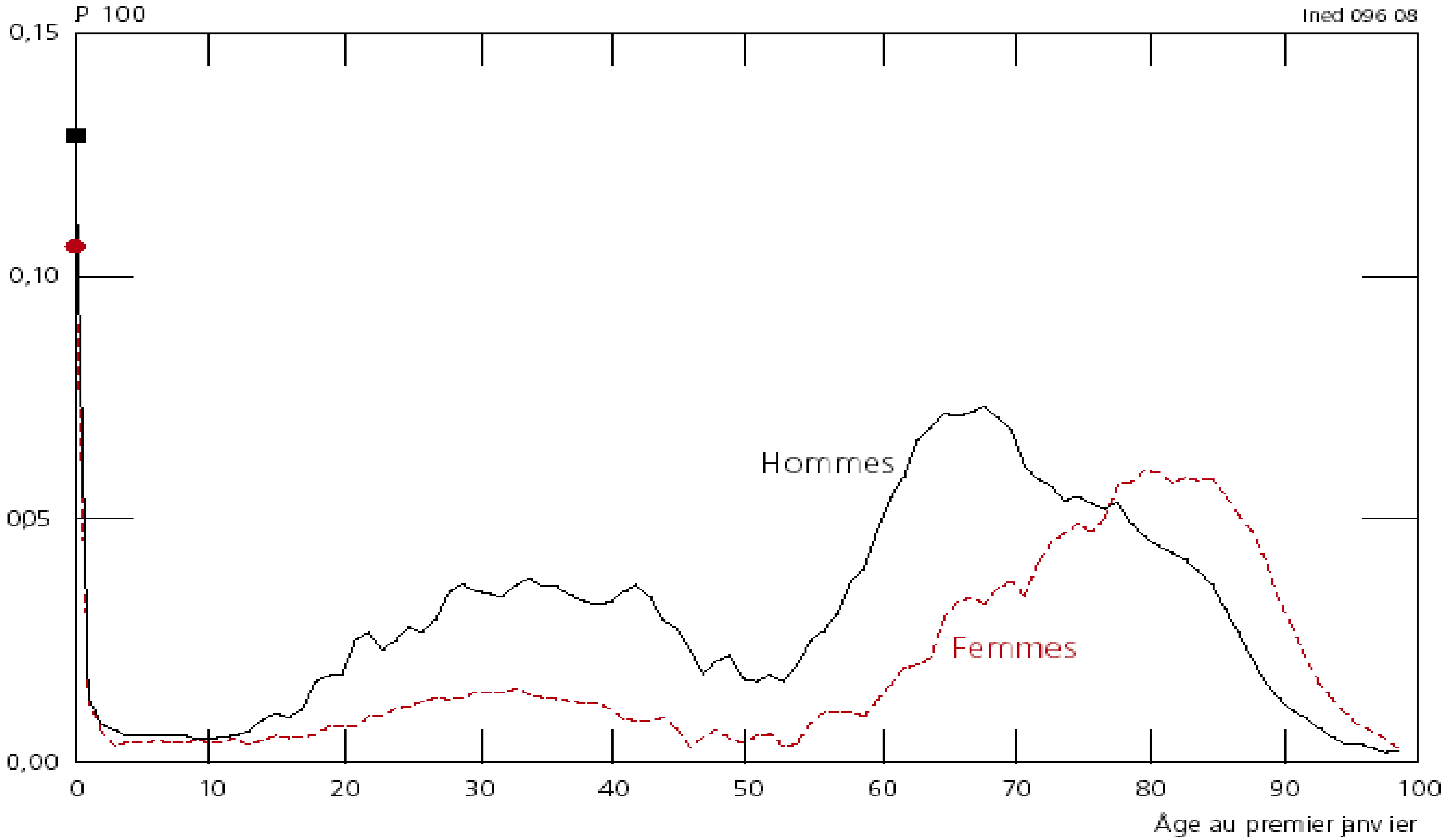
Cette formuler non symétrique est assez fréquemment utilisée dans les publications, parfois sans symétrisation :

$$ {}_n\Delta_x^{tm1-tm2} = \frac{l_x^{tm1}}{l_0}\cdot\left(\frac{{}_nL_x^{tm2}}{l_x^{tm2}}-\frac{{}_nL_x^{tm1}}{l_x^{tm1}}\right)+\frac{T_{x+n}^{tm2}}{l_0}\cdot\left(\frac{l_x^{tm1}}{l_x^{tm2}}-\frac{l_{x+n}^{tm1}}{l_{x+n}^{tm2}}\right) $$

pour l'intervalle fermé-ouvert $\quad {}_\infty\Delta_\omega = \frac{l_\omega^1}{l_0}\cdot\left(\frac{T_\omega^2}{l_\omega^2}-\frac{T_\omega^1}{l_\omega^1}\right)$

Avec une moyenne 'bidirectionnelle' : $\quad \Delta e_0 = \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{x=0}^{\omega}{}_n\Delta_x^{1-2}-\sum_{x=0}^{\omega}{}_n\Delta_x^{2-1}\right)$ on obtient le même résultat qu'avec la formule ci-dessus

Contribution de la baisse de la mortalité à chaque âge à l'augmentation de l'espérance de vie a la naissance entre 1995 et 2005 (comparaison des tables 1994-1996 et 2004-2006)



Source: Beaumel C., Vatan M., 2008, *La situation démographique en 2006* INSEE, Résultats. Société, 2008, N°84

Lecture: Sur les 3 ans d'espérance de vie gagnés entre 1995 et 2005 par les hommes, 0,13 d'année ont été gagné grâce à la baisse de la mortalité infantile (à l'âge 0), chez les femmes la baisse de la mortalité infantile a permis de gagner 0.11 d'année sur le gain total de 2,04 d'années

Exemple numérique (Femmes, USA)

	1935		1935		1995		1995		1935-1995	1995-1935	moyenne	moyenne	Arriaga		
	l_x	$_nL_x$	T_x	e_x	l_x	$_nL_x$	T_x	e_x	a	b	(a,b)	l_x	1995-1935	1935-1995	moyenne
0	1	0.96354	63.32	63.32	1.000	0.994	79.00	79.00	-3.065	2.554	-2.81	-2.809	-2.554	3.0646	2.809
1	0.95458	3.77877	62.36	65.32	0.993	3.969	78.01	78.54	-1.107	0.969	-1.04	-1.038	-0.969	1.1072	1.038
5	0.93887	4.67474	58.58	62.39	0.992	4.957	74.04	74.65	-0.460	0.406	-0.43	-0.433	-0.406	0.4598	0.433
10	0.93174	4.64534	53.90	57.85	0.991	4.953	69.08	69.71	-0.316	0.278	-0.30	-0.297	-0.278	0.3157	0.297
15	0.92613	4.60915	49.26	53.19	0.990	4.945	64.13	64.78	-0.312	0.274	-0.29	-0.293	-0.274	0.3120	0.293
20	0.91861	4.55193	44.65	48.61	0.987	4.933	59.18	59.95	-0.782	0.686	-0.73	-0.734	-0.686	0.7824	0.734
25	0.90341	4.47783	40.10	44.38	0.985	4.919	54.25	55.05	-0.678	0.598	-0.64	-0.638	-0.598	0.6779	0.638
30	0.88746	4.39466	35.62	40.14	0.982	4.900	49.33	50.23	-0.649	0.575	-0.61	-0.612	-0.575	0.6487	0.612
35	0.86997	4.29742	31.22	35.89	0.978	4.874	44.43	45.45	-0.691	0.615	-0.65	-0.653	-0.615	0.6913	0.653
40	0.84847	4.18269	26.93	31.74	0.972	4.837	39.56	40.72	-0.667	0.596	-0.63	-0.632	-0.596	0.6669	0.632
45	0.82368	4.03859	22.74	27.61	0.963	4.786	34.72	36.06	-0.775	0.697	-0.74	-0.736	-0.697	0.7752	0.736
50	0.79012	3.84356	18.71	23.67	0.950	4.707	29.93	31.49	-0.839	0.765	-0.80	-0.802	-0.765	0.8391	0.802
55	0.74539	3.58766	14.86	19.94	0.931	4.584	25.23	27.10	-0.871	0.808	-0.84	-0.840	-0.808	0.8709	0.840
60	0.68688	3.24494	11.27	16.41	0.901	4.397	20.64	22.92	-0.949	0.909	-0.93	-0.929	-0.909	0.9492	0.929
65	0.60779	2.79761	8.03	13.21	0.855	4.116	16.25	19.00	-0.935	0.940	-0.94	-0.937	-0.940	0.9348	0.937
70	0.50757	2.23797	5.23	10.31	0.788	3.722	12.13	15.40	-0.958	1.050	-1.00	-1.004	-1.050	0.9575	1.004
75	0.38276	1.55169	2.99	7.82	0.697	3.187	8.41	12.07	-0.888	1.191	-1.04	-1.039	-1.191	0.8875	1.039
80	0.2393	0.89054	1.44	6.03	0.573	2.481	5.22	9.12	-0.479	0.890	-0.68	-0.684	-0.890	0.4785	0.684
85 +	0.12281	0.552	0.55	4.49	0.414	2.741	2.74	6.62	-0.261	0.879	-0.57	-0.570	-0.879	0.2607	0.570
				-15.68				**15.68**	**-15.68**	**15.68**	**-15.68**	**-15.68**	**-15.68**	**15.68**	**15.68**

a) → $${}_5\Delta_{30}^{A-B} = l_{30}^{A}(e_{30}^{A} - e_{30}^{B}) - l_{35}^{A}(e_{35}^{A} - e_{35}^{B})$$

b) → $${}_5\Delta_{30}^{B-A} = l_{30}^{B}(e_{30}^{B} - e_{30}^{A}) - l_{35}^{B}(e_{35}^{B} - e_{35}^{A})$$

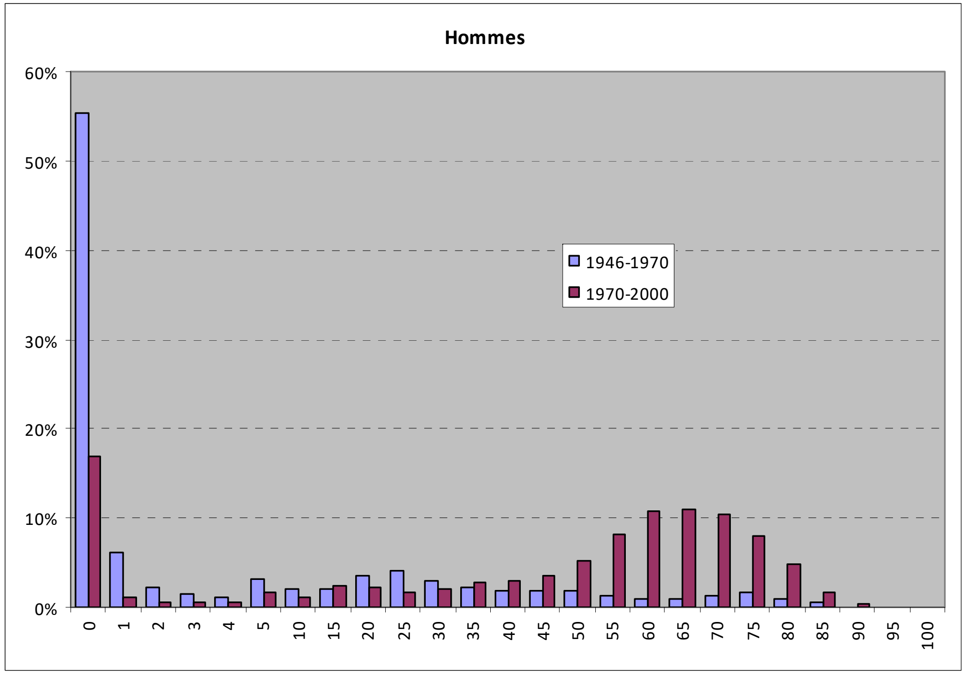
$$\boxed{\Delta e_0^{a/b} = 0,5\cdot\sum_i (a_i - b_i)}$$

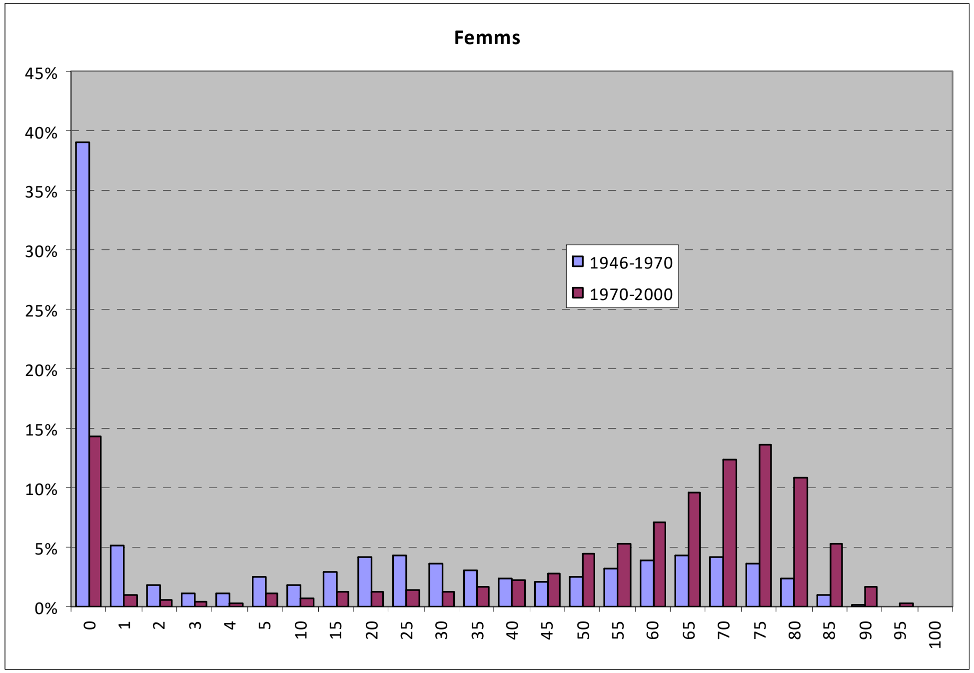
$\bar{l}_x$ → $${}_n\Delta_x = \frac{0.5\cdot\left(l_x^1 + l_x^2\right)}{l_0}\cdot\left(e_x^2 - e_x^1\right) - \frac{0.5\cdot\left(l_{x+n}^1 + l_{x+n}^2\right)}{l_0}\cdot\left(e_{x+n}^2 - e_{x+n}^1\right)$$

a) Arriaga 1995-1935 → $${}_n\Delta_x^{1-2} = \frac{l_x^1}{l_0}\cdot\left(\frac{{}_nL_x^2}{l_x^2} - \frac{{}_nL_x^1}{l_x^1}\right) + \frac{T_{x+n}^2}{l_0}\cdot\left(\frac{l_x^1}{l_x^2} - \frac{l_{x+n}^1}{l_{x+n}^2}\right)$$

b) Arriaga 1935-1995 → $${}_n\Delta_x^{2-1} = \frac{l_x^2}{l_0}\cdot\left(\frac{{}_nL_x^1}{l_x^1} - \frac{{}_nL_x^2}{l_x^2}\right) + \frac{T_{x+n}^1}{l_0}\cdot\left(\frac{l_x^2}{l_x^1} - \frac{l_{x+n}^2}{l_{x+n}^1}\right)$$

Contribution de la baisse de la mortalité pour les différents groupes d'âge quinquennaux à l'augmentation de l'espérance de vie à la naissance en France entre 1946 et 2000

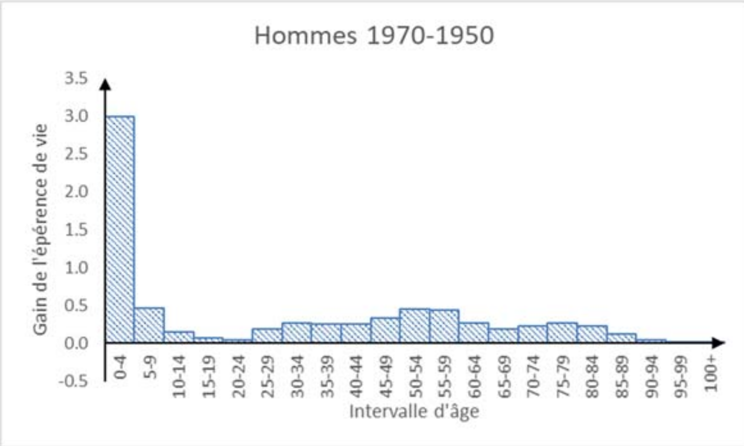


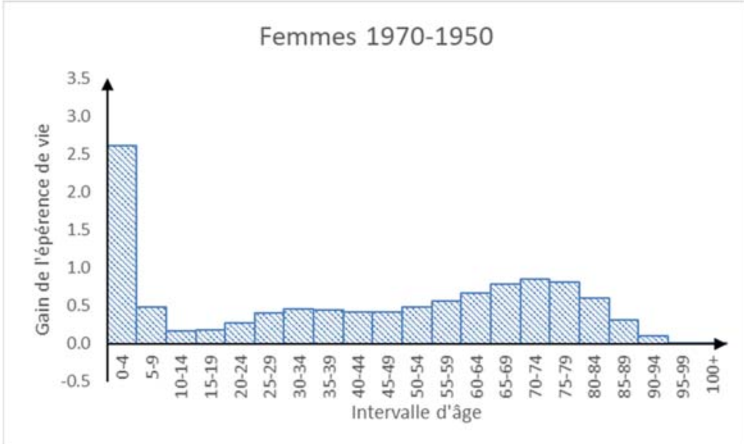


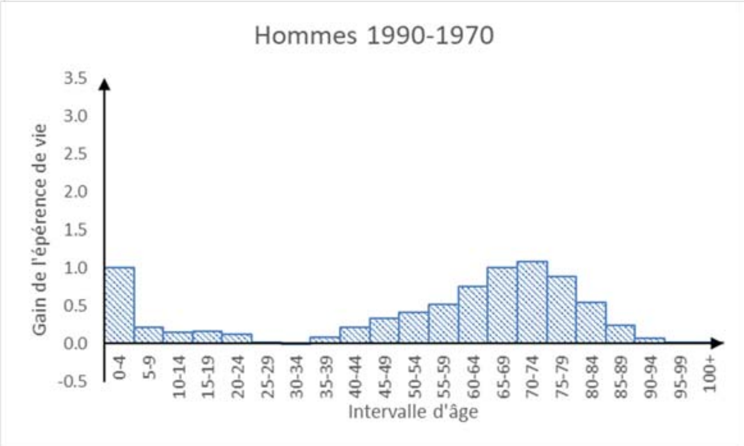
Le défaut de ces méthodes de décomposition que pour trois ou plus périodes consécutives ces résultats ne sont pas additifs, i.e.

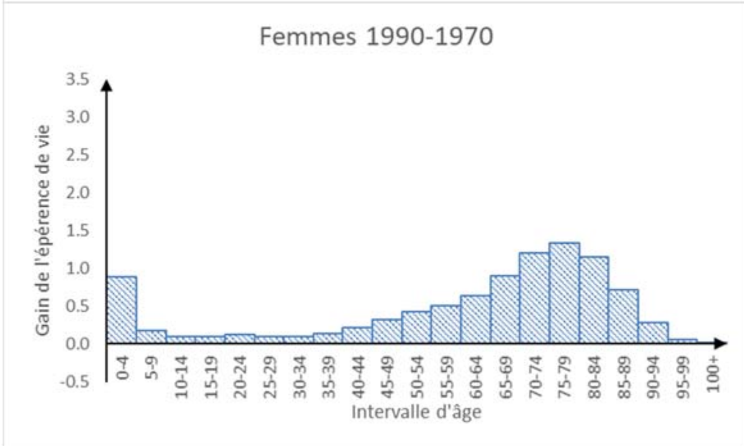
$$\Delta e_0(2000-1946) \neq \Delta e_0(1970-1946) + \Delta e_0(2000-1970)$$

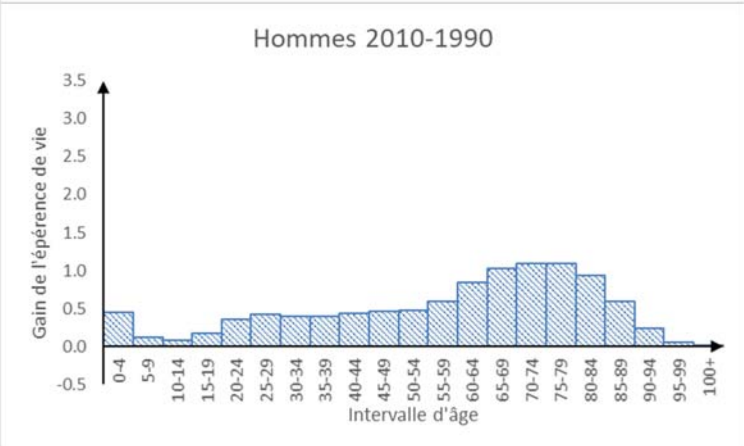
Décomposition de la différence entre l'espérance de vie en France : comparaison des années 1950, 1970, 1990 et 2010

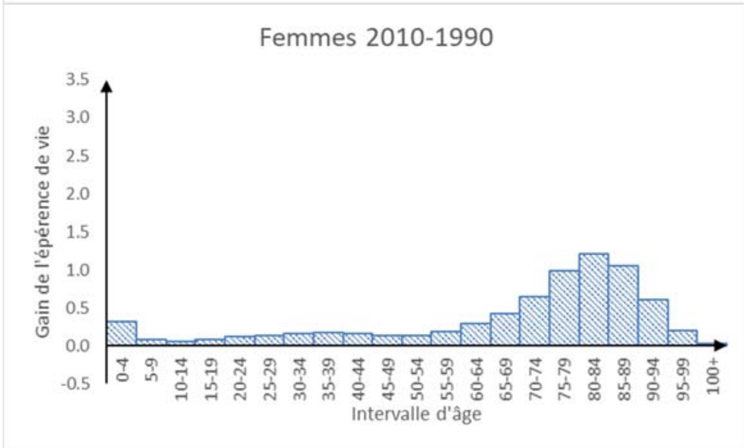








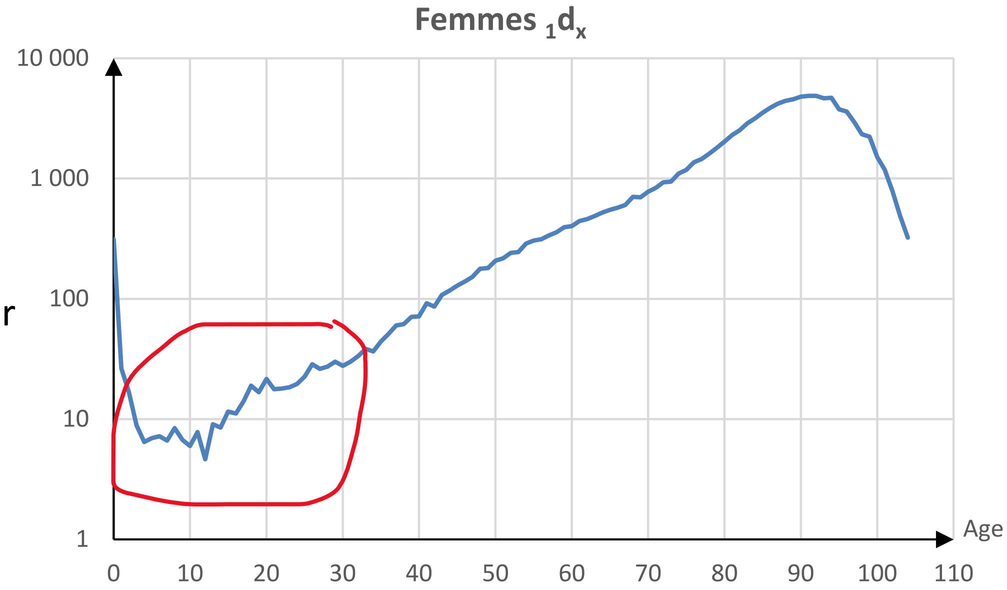


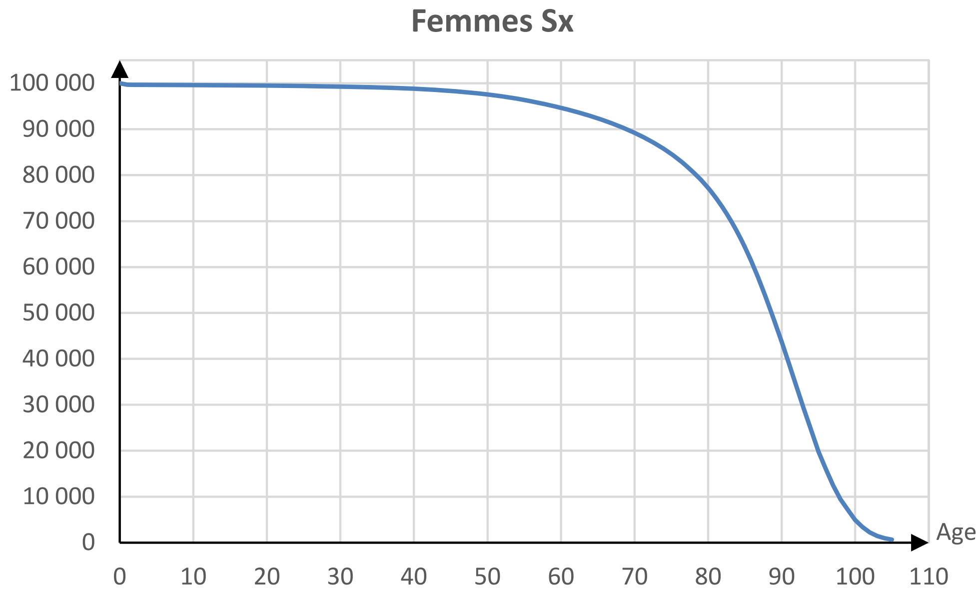


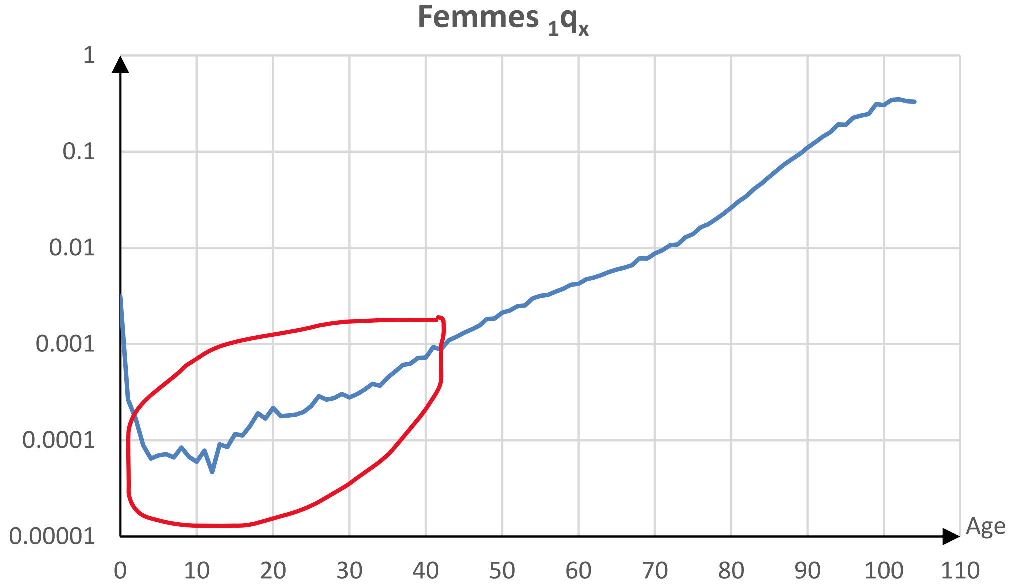
Problèmes d'élimination des fluctuations aléatoire dans les tables de mortalité

Bien que la courbe de survie se voit parfaitement lisse, on remarque que les comportements des indicateurs sur une échelle plus petite ne correspondent pas à l'idée générale de la régularité des paramètres de la mortalité.

Ces irrégularités peuvent être éliminées à l'aide de lissage basé sur les fonctions mathématiques (**splines**) ou bien par l'extension de la période d'observation (**table triennale ex.g**), sinon on peut y introduire une nuance probabiliste supplémentaire (**estimation de l'intervalle de confiance**)







Estimation de la variance dans une table de mortalité

La survie est un processus stochastique discret de type Bernoulli avec une variable aléatoire qui ne prend que deux valeurs (vivant vs décès) avec :

p_i – la probabilité que l'individu reste en vie sur l'intervalle entre x_i et x_{i+1}

q_i – la probabilité que l'individu décède sur l'intervalle entre x_i et x_{i+1}

les espérances mathématiques d'une survie et d'un décès qui sont les événements complémentaires et disjoints distribués selon la loi binominale : $\boldsymbol{p_i + q_i = 1}$

avec la variance sur l'échantillon pour la proportion de survivants $\boldsymbol{S^2_{p_i}}$ et celle de la proportion de décédés $\boldsymbol{S^2_{q_i}}$ qui sont égales $\boldsymbol{S^2_{p_i} = S^2_{q_i}}$

Soit D_i – le nombre de décès sur l'intervalle *(x, x+1)* et
N_i – le nombre de vivants à l'âge x_i, et la probabilité de décéder : $q_i = \dfrac{D_i}{N_i}$

si tous les individus ont la même probabilité de décéder sur l'intervalle, alors $\boldsymbol{D_i}$ est une variable aléatoire binomiale et $\boldsymbol{q_i}$ est la proportion binomiale avec leurs variances :

$$\boxed{S^2_{D_i} = N_i \cdot q_i \cdot (1-q_i)} \rightarrow S^2_{D_i} = D_i \cdot (1-q_i) \quad \text{et} \quad S^2_{q_i} = \frac{q_i \cdot (1-q_i)}{N_i} \rightarrow \boxed{S^2_{q_i} = \frac{q_i^2 \cdot (1-q_i)}{D_i}}\ ^* \qquad \textbf{F1}$$

soit $\boldsymbol{a_i}$ est la fraction du dernier intervalle vécu, et $q_i = \dfrac{n_i \cdot M_i}{1+(1-a_i)\cdot n_i \cdot M_i}$ (voir chap.5, diap.32)

avec $\boldsymbol{P_i}$ – effectif de la population exposée on obtient la formule : $S^2_{q_i} = \dfrac{n_i^2 \cdot M_i \cdot (1-a_i \cdot M_i)}{P_i \cdot [1+(1-a_i)\cdot n_i \cdot M_i]^3}$ **F2**

→ qui se transforme en $S^2_{q_x} = \dfrac{M_x \cdot (1-a_x \cdot M_x)}{P_x \cdot [1+(1-a_x)\cdot M_x]^3}$ si $\boldsymbol{n}$ = 1, et en $S^2_{q_x} = \dfrac{4M_x \cdot (2-M_x)}{P_x \cdot [2+M_x]^3}$ si $\boldsymbol{a_x}$ = 1/2 **F3**

*) $\boldsymbol{D_i}$ – est directement observable, $\boldsymbol{N_i}$ - non

Lecture : Chiang C.L. *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*, Wiley, 1968, p.208-214 (attention à une erreur dans la formule 6, p.212

Variance de l'espérance de vie dans un échantillon

Soit p_{ij} – la probabilité de survie dans l'intervalle (x_i, x_j) calculée comme il suit

$p_{ij} = p_i \cdot p_{i+1} \cdot \ldots \cdot p_{j-1}$ avec *i < j; i,j = 0, 1, 2, …* et $p_i = 1 - q_i$, *i = 0, 1, 2, …*

Alors la variance de p_{ij} se fabrique avec la transformation de König-Huygens

$S^2_{p_{ij}} = p^2_{ij} \cdot \sum_{h=i}^{j-1} p_h^{-2} \cdot S^2_{p_h}$ sachant que $S^2_{p_i} = S^2_{q_i}$ cf. diapo précèdent

On peut ensuite calculer variance de l'espérance de vie des survivants à l'âge α

$$S^2_{e_\alpha} = \sum_{i=\alpha}^{\omega-1} p^2_{\alpha h} \cdot [e_{i+1} + (1-a_i) \cdot n_i]^2 \cdot S^2_{p_i}$$

<u>En quatre étapes (quatre colonnes, voir la diapositive 49-50) :</u>

1. Calculer la variance de p_x (ou q_x) ; x – l'âge dans la première colonne de la table (F1, F2, F3)
2. Calculer le produit $l_x^2 \cdot [e_{x+1} + (1-a_x) \cdot n_x]^2 \cdot S^2_{p_x}$ (où l_x – la survie de table et $S^2_{p_x}$ – la variance de p_x voir pt 1)
3. Sommer les produits calculés dans la colonne 2 de bas vers haut
4. Diviser les sommes dans la colonne 3 par l_x^2 pour obtenir le score de la variance

Table de mortalité abrégée, France métropolitaine, Hommes, 2013

Intervalle d'âge (ans) de x_i à x_{i+1}	Amplitude de l'intervalle	Effectif de la population moyenne	Nombre de décès sur l'intervalle	Taux de mortalité	Fraction vécu dans le dernier intervalle d'âge	Quotient de mortalité sur l'intervalle
x_i x_{i+1}	n_i	P_i	D_i	M_i	a_i	q_i
0 - 1	1	389 063	1 512	0.003886	0.1	0.00387
1 - 5	4	1 591 818	293	0.000184	0.39	0.00074
5 - 10	5	2 013 549	196	0.000097	0.46	0.00049
10 - 15	5	2 018 608	197	0.000098	0.54	0.00049
15 - 20	5	1 941 524	638	0.000329	0.57	0.00164
20 - 25	5	1 907 553	1 228	0.000644	0.49	0.00321
25 - 30	5	1 897 062	1 393	0.000734	0.5	0.00366
30 - 35	5	1 976 661	1 747	0.000884	0.52	0.00441
35 - 40	5	1 987 397	2 418	0.001217	0.54	0.00607
40 - 45	5	2 203 383	4 257	0.001932	0.54	0.00962
45 - 50	5	2 167 438	6 879	0.003174	0.54	0.01575
50 - 55	5	2 086 298	10 793	0.005173	0.53	0.02556
55 - 60	5	1 973 080	16 118	0.008169	0.52	0.04006
60 - 65	5	1 925 166	22 274	0.011570	0.52	0.05629
65 - 70	5	1 558 137	24 424	0.015675	0.52	0.07553
70 - 75	5	1 070 195	24 219	0.022630	0.51	0.10721
75 - 80	5	933 079	33 742	0.036162	0.51	0.16609
80 - 85	5	710 234	45 574	0.064168	0.48	0.27496
85 - 90	5	393 858	46 408	0.117829	0.45	0.44496
90 - 95	5	143 114	29 719	0.207660	0.41	0.64387
95+		184 650	7 398	0.300000		1

1) Score de a_i est estimé à partir moyenne des tables complètes supposant que ${}_1a_x$=0.5

2) Score de q_i est estimé avec la formule

$$q_i = \frac{n_i \cdot M_i}{1 + (1 - a_i) \cdot n_i \cdot M_i}$$

Estimation de la variance sur e_x dans la table de mortalité (France, hommes, 2013)

Intervalle d'âge (ans) de x_i à x_{i+1}	Nombre de vivants à l'âge x_i	Nombre de décès sur l'intervalle	Nombre d'années vecues sur l'intervalle	Nombre d'années vécues après l'âge x_i		Variance de p_i = var(q_i)	Éléments des calculs		Variance estimée de e_i	Écart type estimé de e_i
							Élément 1	Élément 2		
	l_i	d_i	L_i	T_i	e_i	$10^8 Sp_i^2$	f_i	F_i	$10^4 Se_i^2$	Se_i
0-1	100 000	387	99 651	7 879 016	78.79	0.98808	616 602.45	6 183 796.20	6.1838	0.025
1-5	99 613	73	398 272	7 779 365	78.10	0.18471	107 520.85	5 567 193.75	5.6106	0.024
5-10	99 539	48	497 566	7 381 093	74.15	0.12073	61 819.89	5 459 672.90	5.5103	0.023
10-15	99 491	49	497 343	6 883 526	69.19	0.12075	52 889.06	5 397 853.01	5.4532	0.023
15-20	99 442	163	496 861	6 386 183	64.22	0.42184	157 626.65	5 344 963.95	5.4051	0.023
20-25	99 279	319	495 582	5 889 322	59.32	0.83823	268 938.86	5 187 337.30	5.2629	0.023
25-30	98 960	363	493 894	5 393 739	54.50	0.96060	256 286.84	4 918 398.44	5.0223	0.022
30-35	98 597	435	491 944	4 899 845	49.70	1.10818	241 066.46	4 662 111.60	4.7957	0.022
35-40	98 163	595	489 444	4 407 901	44.90	1.51272	262 810.91	4 421 045.14	4.5881	0.021
40-45	97 567	938	485 678	3 918 458	40.16	2.15187	293 082.89	4 158 234.23	4.3682	0.021
45-50	96 629	1 522	479 643	3 432 780	35.53	3.55106	368 794.83	3 865 151.34	4.1395	0.020
50-55	95 107	2 431	469 821	2 953 137	31.05	5.89645	453 063.66	3 496 356.51	3.8654	0.020
55-60	92 676	3 713	454 470	2 483 316	26.80	9.55744	521 510.29	3 043 292.85	3.5433	0.019
60-65	88 964	5 007	432 800	2 028 845	22.81	13.42307	487 000.00	2 521 782.56	3.1863	0.018
65-70	83 956	6 342	404 561	1 596 046	19.01	21.59531	479 650.34	2 034 782.56	2.8868	0.017
70-75	77 615	8 321	367 686	1 191 485	15.35	42.36914	524 740.42	1 555 132.22	2.5816	0.016
75-80	69 294	11 509	318 270	823 799	11.89	68.17994	410 549.79	1 030 391.79	2.1459	0.015
80-85	57 784	15 889	247 611	505 528	8.75	120.28025	307 923.67	619 842.00	1.8564	0.014
85-90	41 896	18 642	158 213	257 917	6.16	236.79822	205 863.26	311 918.33	1.7771	0.013
90-95	23 254	14 972	72 100	99 704	4.29	496.78724	106 055.07	106 055.07	1.9613	0.014
95+	8 281	8 281	27 605	27 605	3.33					

$$S_{\hat{q}_i}^{\ 2} = \frac{\hat{q}_i^2 \cdot (1-\hat{q}_i)}{D_i}$$

$$F_i = \sum_{j=i}^{\omega} f_j$$

$$f_i = l_i^2 \cdot [e_{i+1} + (1-a_i) \cdot n_i]^2 \cdot S_{p_i}^2$$

Comparaison des tables régionales de mortalité : Tables des Nations Unies 1982 vs tables « Ouest » de C.-D.1983 (niveau 9, 15, 21)

$$\frac{{}_nq_x}{{}_nq_x^W}$$

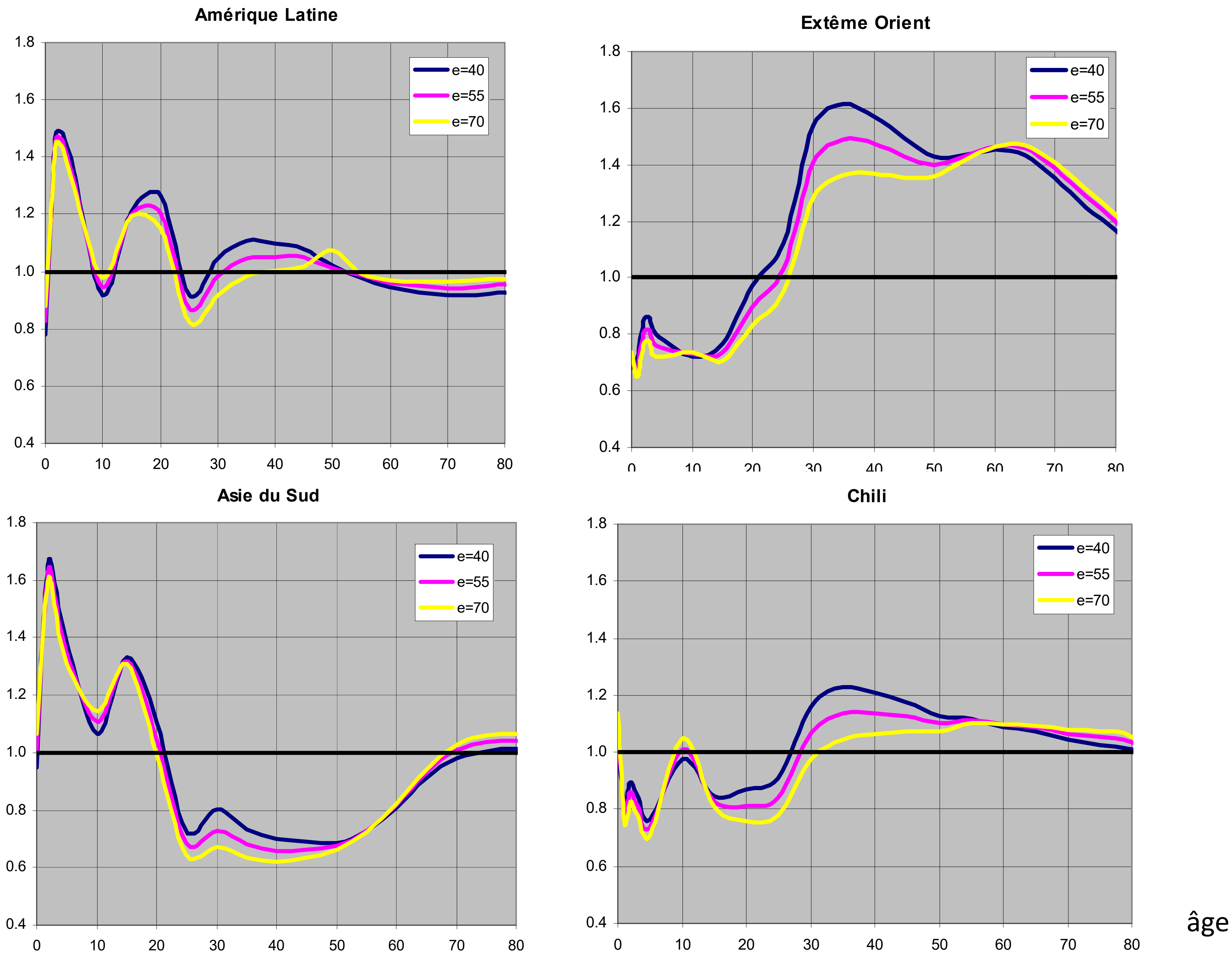


Table de mortalité comme modèle de croissance de la population

Rappel : voir partie 1 du cours

Le temps est discret : ➔ $$P(t) = k \cdot P(t-1)$$

$$P(t) = k^t \cdot P(0)$$

$\boxed{k - \text{taux de croissance}}$

Le temps est continu : ➔ $$\frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{P} = r$$

$\boxed{r - \text{taux d'accroissement}}$

$$P(t) = e^{rt} \cdot P(0)$$

$k = e^r \quad ou \quad k = \exp(r)$

$$r = b - d$$

Annexe

Le taux d'accroissement et la probabilité de survie

$$P(T) = P(0) \cdot e^{r(t)\cdot\Delta t} \cdot e^{r(t)\cdot\Delta t} \ldots \cdot e^{r(t)\cdot\Delta t} =$$

$$= P(0) \cdot e^{r(t)\cdot\Delta t + r(t)\cdot\Delta t + \ldots + r(t)\cdot\Delta t} = P(0) \cdot e^{\int_0^\tau r(t)\cdot dt}$$

$$P(T) = P(0) \cdot e^{\int_0^T r(t)dt} \Rightarrow P(T) = P(0) \cdot e^{\bar{r}[0;T]\cdot T}$$

$$P(t) = P(0) \cdot e^{r\cdot T} \Rightarrow P(t) - P(0) = P(0) \cdot (e^{r\cdot T} - 1)$$

$$\frac{P(t) - P(0)}{P(0)} = (e^{r\cdot T} - 1) \Rightarrow \boxed{p = e^{r\cdot T}}$$

Sachant que ***r = n – m***; et que ***n=0*** ➔ $p = e^{-m\cdot T}$

Annexe

Le taux d'accroissement et la probabilité de décès

$$P(T) = P(0)\cdot e^{\bar{r}[0;T]\cdot T} \Rightarrow P(0) - D(t) = P(0)\cdot e^{r\cdot T}$$

$$P(0) - P(0)\cdot e^{r\cdot T} = D(t) \rightarrow D(t) = P(0)\cdot\left(1 - e^{r\cdot T}\right)$$

$$(1 - e^{r\cdot T}) = \frac{D(t)}{P(0)} \Rightarrow (1 - \frac{D(t)}{P(0)}) = e^{r\cdot T}$$

$$(1 - q) = e^{r\cdot T}$$

$$\boxed{q = 1 - e^{r\cdot T}}$$

Annexe

Le taux de mortalité de table est le taux d’accroissement pour une génération dans la population stationnaire

La population stationnaire ➔ la population de la table de mortalité L_x.

La population stationnaire ➔ $\sum_x L_x$

On peut réécrire la formule de croissance

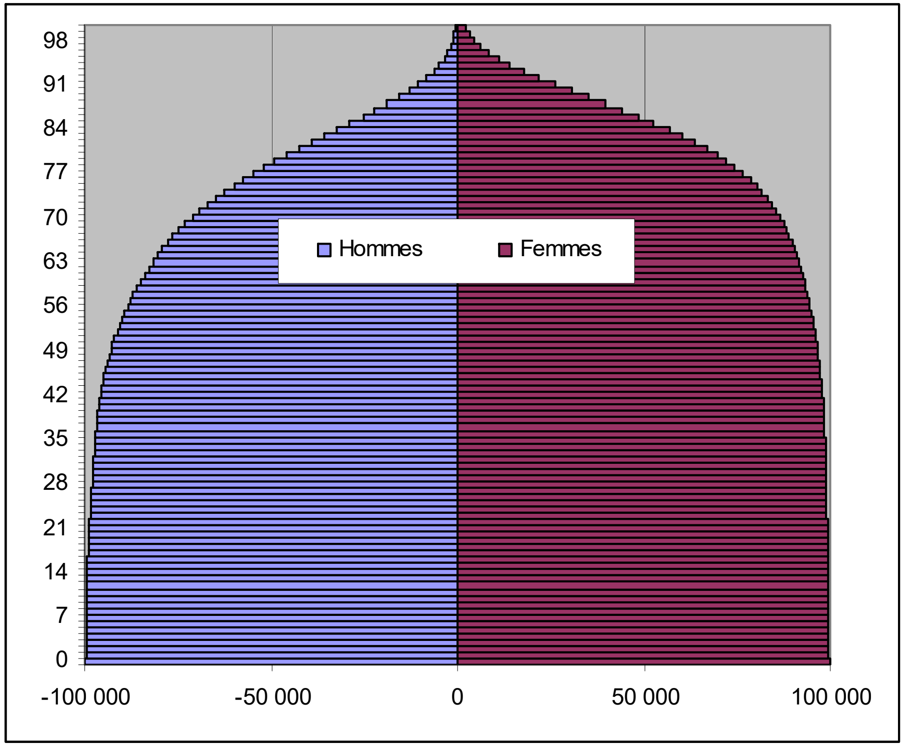
$$(1-e^{r \cdot T}) = \frac{D(t)}{P(0)}$$ pour une génération de table

$$(1-e^{r \cdot T}) = \frac{D_x}{S_x} = \frac{\sum_{y=0}^{x} {}_n d_y}{S_x}$$

Comme $q_x = (1-e^{r \cdot T})$ et $r = -m$

L’accroissement est toujours négatif (la population se diminue) il faut le prendre avec le signe moins (négative)

Populations stationnaires de la table de mortalité (France, 2000-2002)



Formules de conversion des taux en quotient

$${}_n q_x = (1-e^{-m_x \cdot n})$$

$$\frac{\ln(1-{}_n q_x)^{-1}}{n} = m_x$$

Annexe : démonstration pour la fiche « Le paradoxe de la mortalité infantile »[1)]

Approche 1 : les équations récurrentes

$$\begin{cases} e_x = \dfrac{T_x}{S_x} \\ e_{x+n} = \dfrac{T_{x+n}}{S_{x+n}} \end{cases} = \begin{cases} e_x = \dfrac{T_x}{S_x} \\ e_{x+n} = \dfrac{T_x - L_x}{S_x \cdot {}_n p_x} \end{cases} \rightarrow e_{x+n} - e_x = \frac{T_x - L_x}{S_x \cdot {}_n p_x} - \frac{T_x}{S_x}$$

$$e_{x+n} - e_x = \frac{T_x - L_x}{S_x \cdot {}_n p_x} - \frac{T_x}{S_x} = \frac{T_x - L_x}{S_x \cdot {}_n p_x} - \frac{T_x \cdot {}_n p_x}{S_x \cdot {}_n p_x}$$

$$e_{x+n} - e_x = \frac{T_x - {}_n L_x - T_x \cdot {}_n p_x}{S_x \cdot {}_n p_x} = \frac{T_x (1 - {}_n p_x) - {}_n L_x}{S_x \cdot {}_n p_x} = \frac{e_x \cdot {}_n q_x - \dfrac{{}_n L_x}{S_x}}{{}_n p_x}$$

$$e_{x+n} - e_x = \frac{e_x \cdot {}_n q_x - \dfrac{{}_n L_x}{S_x}}{{}_n p_x} \quad quod\ erat\ demonstrandum$$

[1)] **R.PRESSAT (1995)** *Elements de démographie matématiques,* Edition de l'AIDELF, p.18-22

Annexe : démonstration pour la fiche « Le paradoxe de la mortalité infantile »[1)]

Approche 2 : soit l'espérance de vie $e(x)$ est une fonction continue → $e(x) = \frac{\int_x^\infty S(\xi)d\xi}{S(x)} \to \lim_{\Delta x \to 0}(e_{x+\Delta x} - e_x) \simeq e'(x)$

$$e'(x) = \frac{-[S(x)]^2 - S'(x)\int_x^\infty S(\xi)d\xi}{[S(x)]^2} = -1 - \frac{S'(x)}{S(x)} \cdot \frac{\int_x^\infty S(\xi)d\xi}{S(x)} = -1 + q(x)\cdot e(x)$$

Ainsi $e(x)$ est croissant tant que $e'(x) = -1 + q(x)\cdot e(x) > 0$ donc si $q(x) > \frac{1}{e(x)}$

À l'envers $e(x)$ est décroissant tant que $q(x) > \frac{1}{e(x)}$ *Quod Erat Demonstrandum*

Au retour dans le domaine discret on voit : $S_x \cdot e_x = S_x(1 - {}_nq_x)\cdot(1 + e_{x+1}) + S_x \cdot {}_nq_x \cdot {}_na_x$

Ainsi pour que $e_{x+1} > ex = (1 - {}_nq_x)(1 + e_{x+1}) + q_x \cdot a_x$ il faut ${}_nq_x > \frac{1}{e_{x+1} + 1 - {}_1a_x}$

---

1) **R.Pressat (1995)** *Elements de démographie matématiques,* Edition de l'AIDELF, p.18-22