



UNIVERSITÉ PARIS 1  
PANTHÉON SORBONNE  
OMNIBUS SAPIENTIA UNICUIQUE EXCELLENTIA

Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,  
**Institut de démographie**



Cours d'analyse démographique pour Master de démographie par Alexandre Avdeev (IDUP)

## Chapitre 8

### Approche démographique de l'analyse de fécondité\*

1. Introduction : la physiologie de la reproduction humaine (âge féconde, etc.) et l'histoire des études démographiques de la fécondité
2. Les indicateurs conventionnels de la natalité et de la fécondité
3. Fécondité par âge: approche transversale (fécondité par âge, fécondité totale, âge moyen à la maternité)
4. Fécondité par rang de naissance (probabilité d'agrandissement de la famille)
5. Approche longitudinale: descendance finale (à partir de l'état civil et d'une enquête rétrospective)
6. Interférence entre les indicateurs transversaux et longitudinaux
7. Tables de fécondité par âge des mères et par rang de naissances
8. Engrenage de la mortalité et de la fécondité; le niveau de fécondité dans le monde contemporain.
9. Fécondité, cycle de vie et les approches auxiliaires de l'analyse de la fécondité

\* avec les contributions de Mme Jitka Rychtaříková, professeure de démographie à l'Université Charles de Prague

1



**Robert René Kuczynski**  
1876-1947

## Un peu d'histoire

Les principes d'analyse démographiques de la natalité et de la fécondité se sont formés plus tardivement que ceux d'analyse de la mortalité. Jusqu'au début du 20<sup>e</sup> siècle l'analyse de la fécondité a été réduite aux rapports des mariages à l'effectif de la population, et des naissances au nombre des mariages, ou, au mieux, aux rapports entre les naissances et l'effectif des femmes 15–49 ans. La situation commence à changer dès le début du 20<sup>e</sup> siècle grâce aux travaux de R. Kuczynski et A. Lotka. Voilà un extrait d'un des derniers articles de R. Kuczynski :

**R. Kuczynski (1938) The analysis of vital statistics // *Economica*, New Series, Vol. 5, No. 18 (May, 1938), pp. 138-163 and No. 19 (Aug., 1938), pp. 289-315**

"Until about 1930 the frequency of births was measured in official statistics according to the same principles as the frequency of marriages. In countries where the age of mothers at birth was not recorded, fertility was measured by relating the number of births to the number of inhabitants (crude birth rate) or to the number of women at child-bearing age (general fertility rate), the latter information being supplemented as a rule by the ratio of legitimate births to married women and the ratio of illegitimate births to unmarried women. In countries where the age of mothers at birth was ascertained, specific fertility rates were computed for the various age groups or even for each year of age; but these disconnected rates did not throw any light on fertility as a whole.

To-day the situation is quite different. In most countries where the age of mothers at birth is recorded, a very simple device is used for fusing the specific fertility rates into one numerical expression,<sup>1</sup> and the realization that by this means they may obtain a clear picture of the fertility of their people has induced many countries which formerly did not ascertain the age of mothers at birth now to collect this information.<sup>2</sup> Economic Intelligence Service of the League of Nations has published every year a survey for all the countries providing the necessary basic data.<sup>3</sup>" (p.295)

---

- 1) I suggested this device and applied it to the birth statistics of Sweden 1891-1900 and Berlin 1896-1900 in a paper submitted to the International Congress on Hygiene and Demography held in Berlin, 1907 (see *Bericht*, Vol. III, pp. 1472-1484; reprinted in *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Third Series, Vol. XXXV, pp. 229-241).
- 2) The United Kingdom has followed suit on 1<sup>st</sup> July, 1938.
- 3) See Statistical year-Book of the League of Nations, 1935-36, pp. 50-57; 1936-37, pp. 44-51; 1937-38, pp. 51-59.



« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

2

## Quelques définitions générales pour commencer :

### Fécondité et Natalité

On étudie sous le nom de **fécondité** les phénomènes quantitatifs directement liés à la procréation des enfants au sein des populations ou des sous-populations. Le mot **natalité** est utilisé pour désigner la fréquence des naissances au sein des populations proprement dites, à l'exclusion des sous-populations, et l'on entend plus particulièrement par fécondité la fréquence des naissances au sein d'ensembles en âge de procréer.

### Naissance

On distingue les **naissances vivantes**, ou naissances d'enfants nés vivants, des **naissances d'enfants mort-nés**, à l'aide de **critères de vitalité** tels que la respiration, la mobilité, le battement du cœur de l'enfant, après complète expulsion ou extraction.

### Fertilité, stérilité (≠ infécondité)

Les mots **fertilité** et **stérilité** sont employés en démographie pour désigner respectivement la **capacité** ou l'**incapacité de donner le jour à des enfants vivants** ; l'incapacité à concevoir et l'incapacité à procréer sont des causes principales d'**infécondabilité**, mais non uniques de la stérilité.

### Indicateurs

Le **taux brut de natalité**, ou plus précisément le taux brut annuel de natalité effective, s'obtient en divisant le nombre annuel des naissances vivantes par l'effectif moyen de la population. Des méthodes analogues à celles employées pour le calcul des taux comparatifs de mortalité permettent d'obtenir des **taux comparatifs de natalité**.

### Structure par rang

Dans les taux de fécondité par rang, on rapporte les naissances d'un certain rang à un nombre de femmes, à un nombre de mariages, à un nombre de naissances du rang précédent. On appelle taux de fécondité par parité des taux où **les naissances d'un rang donné (n) sont rapportées aux seules femmes susceptibles de donner naissance à un enfant de rang n (femmes de parité n-1)**.

Demopædia, Dictionnaire démographique multilingue, seconde édition unifiée, volume français. .  
<http://www.demopædia.org/tools/?lang=fr>

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

3

3

## Age démographique et physiologique de fécondité

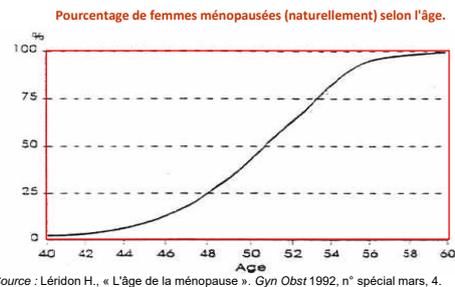
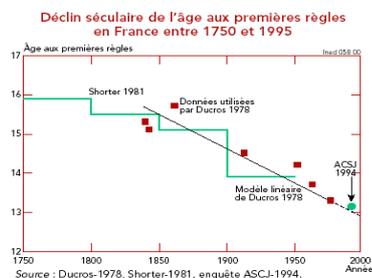
### Age physiologique de fécondité

Chronologie	Age moyen (extrêmes)
Puberté: accélération du rythme de croissance staturale	11 (8-14)
Ménarche	13 (11-15)
Cycles ovulatoires	15
Ménopause	50 (40-55)

**Le début :** l'âge de puberté des filles varie entre 8 et 13 ans ; l'âge de règles (ménarche) varie entre 11 et 15 ans

**La fin :** l'âge de ménopause se situe à 51 ans en moyen (varie entre 48 et 55 ans). Lorsque l'arrêt de la menstruation a dépassé la durée de 1 an, on admet qu'on est entré dans la période de ménopause confirmée.

**Période d'activité fonctionnelle complète** de la fin de la puberté jusqu'à la ménopause : Déroulement d'environ **300 cycles ovulatoires**. Cette période se termine quand le nombre de follicules primordiaux est devenu très faible ou nul.



**En démographie** il est convenu que les limites d'âge pour la période fécondes sont **15-49 ans révolu**.

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

4

4

## Stérilité, fertilité : la part des hommes

Elise de la Rochebrochard

(*Population & Sociétés*, n° 371, Septembre 2001)

[https://www.ined.fr/fichier/s\\_rubrique/38715/pop\\_et\\_soc\\_francais\\_371.fr.pdf](https://www.ined.fr/fichier/s_rubrique/38715/pop_et_soc_francais_371.fr.pdf)

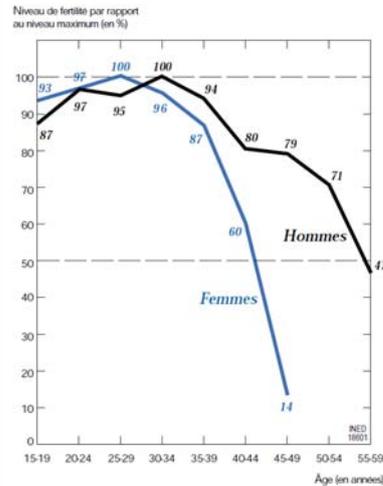
Tableau 1 - Répartition des causes d'infécondité

Cause d'infécondité	Pour 100 couples
Mixte (féminine et masculine)	38
Purement féminine	34
Purement masculine	20
Inconnue	8

Source : [1] - Enquête auprès de 1 686 couples ayant consulté un gynécologue ou un obstétricien (exerçant en indépendant ou en milieu hospitalier) entre juillet 1988 et juin 1989 dans trois départements français (Indre-et-Loire, Loire-Atlantique, Haute-Vienne), pour un problème d'infécondité (défini par une période d'attente sans conception d'au moins 12 mois). La répartition des causes d'infécondité est estimée à partir des 1 318 couples dont les deux partenaires ont été examinés.

[1] P. THONNEAU, S. MARCHAND, A. TALLEC, M. L. FERIAL, B. DUCOT, J. LANSAC, P. LOPES, J. M. TABASTE et A. SPIRA «Incidence and main causes of infertility in a resident population (1,850,000) of three French regions (1988-1989)», *Human Reproduction*, 1991, vol. 6, n° 6, p. 811-816.

Figure 1 - Variations de la fertilité avec l'âge de l'homme et l'âge de la femme



Source : [4] - Estimations issues d'une régression effectuée sur 5959 biographies de femmes mormons nées entre 1840 et 1859.

[4] G.P. MINEAU et J. TRUSSELL - «A specification of marital fertility by parents' age, age at marriage and marital duration», *Demography*, 1982, vol. 19, n° 3, p. 335-350.

5

## Les paramètres de croissance d'une population humaine

(extrait du cours « Histoire de la population mondiale »)

Paramètres fixes (leurs porteurs sont les individus et ils ne dépendent pas de l'organisation sociale, ou de la population)	Paramètres variables (se forment dans la vie sociale d'une population)
A. La procréation (reproduction)	
1. Mode de reproduction (espèce) : (sexué, asexué, unisexué/parthénogenèse mâle ou femelle, bisexué).	1. Mode de comportement sexuel (sexué) : signalisation sexuelle des mâles et des femelles (codes et identité sexuelle), sélection des partenaires.
2. Le rapport des sexes à la naissance (105 mâles / 100 femelles, 23 <sup>e</sup> chromosome : F → XX, H → XY)	1. Ratio des sexes à l'âge de procréation : couples, harem
3. Cycle de la reproduction humaine et ses composants (espèce) : i. Fertilité : - nombre d'ovules dans les ovaires des femmes (400 000) ovules ; - durée d'un cycle ovarulatoire (~28 jours) ; - durée de la période féconde dans la vie (15-50 ans : 300-400 cycles ovarulatoires 1% d'ovules) ; ii. Durée de la grossesse : 9 mois iii. Durée de la période anovulatoire après l'accouchement normal : - sans allaitement (2-3 mois) ; - avec allaitement (jusqu'à 24 mois) iv. Pertes « naturelles » (probable) : - mortalité intra-utérine (survie de fœtus ou d'un ovule fécondé 4/5)	3. Comportement procréateur (population) : - l'âge du début de rapports sexuels (→ l'âge au premier mariage) ; - les interdictions sexuelles (les périodes et les partenaires interdits) ; - les soins des petits enfants (la durée et l'intensité d'allaitement ; préférences de sexe) - le contrôle délibéré de la fécondité (contraception et l'avortement provoqué) ; - signification sociale de la fécondité (l'identité et la reconnaissance sociale)
B. La durée de vie	
4. Longévité et résistance individuelle (espèce) : - longévité « naturelle » (≥ à la limite supérieure de l'âge de fécondité) ; - la protection naturelle contre des parasites (système immunitaire) ; - seuil de résistance ; - sélectivité sexuelle et selon l'âge (qui meurt d'abord et pourquoi)	3. Durée de vie (population) : - solidarité sociale ; - normes du comportement sanitaire ; - savoir en traitement des maladies (médecine) ;

6

## Indicateurs conventionnels de la fécondité

7

### Indicateurs conventionnels de la natalité et de la fécondité:

Rappel : on parle de la natalité quand il s'agit d'un nombre de naissances (total ou relatif à l'effectif de la population) le plus souvent dans le contexte de l'équation du bilan démographique. Dans les autres cas on parle de la fécondité, en assimilant cette notion aux résultats de comportement individuel, et en résumant les indicateurs en « nombre d'enfants par femme » qui s'inscrivent dans le contexte de l'analyse de reproductions des générations.

Soit  $t$  un intervalle (unité) de temps (période d'observation) ;

$N(t)$  – nombre de naissances enregistrées durant la période  $t$  ;

$\bar{P}(t)$  – effectif moyen annuel de la population sur la période  $t$  ;

${}_{35}\bar{P}_{15}^F(t)$  – population moyenne de sexe féminin à l'âge de 15 à 50 ans (annuelle) sur la période  $t$  ;

#### 1) Taux brut de natalité

Application : bilan démographique

$$TBN(t) = \frac{N(t)}{t \cdot \bar{P}(t)}$$

#### 2) Taux global de fécondité

Application : reproduction des générations fictives ou réelles

$$TFG(t) = \frac{N(t)}{t \cdot {}_{35}\bar{P}_{15}^F(t)}$$

Soit  ${}_{35}C_{15}^F(t)$  – la proportion des femmes âgées 15-49 dans la population totale (on omet «  $t$  », si sa valeur ne participe pas aux calculs)

$$\text{Alors on peut en déduire que } \Rightarrow TBN = TFG \cdot {}_{35}C_{15}^F$$

$${}_{35}C_{15}^F = \frac{{}_{35}\bar{P}_{15}^F}{\bar{P}} \quad \text{cette proportion des femmes féconde est un facteur de structure (facteur de confusion dans l'analyse de la dynamique de natalité)}$$

A partir de données d'un recensement ou d'une enquête il est possible de caractériser le niveau de fécondité avec le rapport enfants / femmes (Rapport E/F) est un rapport du nombre d'enfant à l'âge de 0-4 ans sur le nombre des femmes à l'âge 15-49 (44) ans

$$\Rightarrow REF = \frac{\sum_{x=0}^4 P_x}{\sum_{x=15}^{49} P_x^F}$$

8

### Standardisation: construction des indices de fécondité « nets » de l'influence de la structure de population par âge

Soit  ${}_n\bar{P}_x^F$  – effectif moyen des femmes âgées de  $x$  à  $x+n$  ans révolus sur une période  $t$   
 ${}_nN_x$  – nombre de naissances durant la période  $t$  chez les femmes âgées de  $x$  à  $x+n$  ans révolus

alors on calcule  ${}_n f_x = \frac{{}_n N_x}{t \cdot {}_n \bar{P}_x^F}$  → **naissances réduites par âge ou taux de fécondité par âge (de 2d catégorie) : sur un intervalle d'âge [x et x+n) et une période « t »**  
 taux de fécondité spécifique à l'âge (tfsa) = age specific fertility rate (asfr)

Taux de fécondité par âge sont toujours annualisés (réduits à une année d'âge et une année de calendrier), i.e. la valeur du taux de fécondité à l'âge 20-24 ( $f_{20}$ ) s'applique aux âge 20, 21, 22, 23 et 24 ans

On résume les indicateurs « classiques » de la fécondité avec les taux par âge afin de séparer l'effet de niveau (de fécondité) de l'effet de composition de la population par âge et par sexe :

$$TBN = \frac{N}{t \cdot \bar{P}} = \frac{\sum_{s=h;f} \sum_{x=0}^{\infty} {}_n f_x^s \cdot {}_n P_x^s}{\sum_{s=h;f} \sum_{x=0}^{\infty} {}_n P_x^s} = \sum_{x=0}^{\infty} {}_n f_x^F \cdot {}_n C_x^{F_s} / \bar{P}$$

taux brut de natalité est une moyenne des taux de fécondité par âge et par sexe pondérés par les proportions des femmes aux âges féconds ( ${}_n P_x$ ) dans l'effectif total de la population ( $\bar{P}$ ) (sachant que les taux de fécondité par âge  $\neq 0$  que pour femmes âgées de 15 à 50 ans)

$$TFG = \frac{N}{t \cdot \sum_{x=15}^{49} {}_n \bar{P}_x^F} = \frac{\sum_{x=15}^{49} {}_n f_x \cdot {}_n \bar{P}_x^F}{\sum_{x=15}^{49} {}_n \bar{P}_x^F} = \sum_{x=15}^{49} {}_n f_x \cdot {}_n C_x^{F_s} / {}_{35}F_{15}$$

taux de fécondité globale est une moyenne des taux de fécondité par âge pondérés par les proportions des femmes des tranches d'âge spécifique dans l'effectif total des femmes d'âge fécond (15-49 ans)

On voit que les deux taux dépendent de la fécondité par âge (comportement) et de la structure de la population par sexe et par âge (histoire démographique) dans la même mesure

**Comment peut-on construire un indicateur intégral, indépendant de l'influence des facteurs étrangers au comportement procréateur ?**

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 9

9

### Approche descriptive statistique : densité de la fécondité (taux par âge)

tendance centrale, variation par rapport à la tendance central, cumul sur les intervalles d'âge,

Taux de fécondité par âge en 1966 et en 1990  
densité de la fécondité (par âge) =  $f(x)$

a) les indicateurs de position

1966 → ISF = 2,67 ; Age moyen à la maternité = 27,3 ; Écart type d'âge = 5,74 ; Age modal = 23 ; Age médian = ?  
 1990 → ISF = 1,77 ; Age moyen à la maternité = 28,3 (+1 an) ; Écart type d'âge = 5,05 ; Age modal = 27 (+4 ans) ; Age médian = ?

Les valeurs absolues de l'écart type sont peu informatives, en revanche, une comparaison des coefficients de variation (CV = 100% x ET/m), démontre l'augmentation de la concentration de la fécondité CV<sub>1966</sub> = 21% et CV<sub>1990</sub> = 18%

Cumul des taux de fécondité par âge en 1966 et en 1990  
distribution de la fécondité =  $F(x) = \int_{15}^x f(y)dy$

b) les indicateurs de niveau (volume)

Pour faciliter les calculs de l'âge médian (et les quartiles d'âge) de fécondité, il est utile de passer aux valeurs relatives de la fécondité qu'on appelle « les éléments de calendrier ».

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 10

10

### Eléments de calendrier : une fonction normalisée de la fécondité par âge

La normalisation (l'élimination de l'effet du niveau) permet d'estimer la contribution relative (en %) de la fécondité à un âge donné à la fécondité totale

#### Eléments de calendrier (tempo) de la fécondité en 1966 et en 1990 en (densité en %)

$\phi(x) = \frac{f(x)}{\int_{15}^{50} f(x)dx} \approx \frac{f_x}{\sum_{j=15}^{50} n \cdot f_j} = \frac{n \cdot f_x}{F_{50}}$

#### Distribution relative de la fécondité par âge en 1966 et en 1990 (cumul en %)

$\Phi(50) = \int_0^{50} \phi(x)dx = 1$

$\Phi(x) = \int_0^x \phi(x)dx \approx \frac{F_x}{F_{50-n}}$

**1966** → ISF = 2,67 ; Age moyen = 27,3 Ecart type d'âge = 5,74; Age modal = 23 ; Age médian = 26,4  
**1990** → ISF = 1,77 ; Age moyen = 28,3 Ecart type d'âge = 5,05; Age modal = 27 ; Age médian = 27,4 (+ 1 an)

**Le passage à l'échelle relative permet de voir plus clairement 1) le recul de la fécondité aux âges élevés, 2) une légère augmentation de la concentration et 3) une diminution de la dissymétrie de la distribution**

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 11

11

### Âge moyen de la fécondité (à la maternité) :

Puisque la fécondité d'une année est présentée sous la forme d'une distribution dépendante de l'âge, on peut la caractériser avec des statistiques appropriées de la tendance centrale (la moyenne, le mode, la médiane) et de forme (l'écart type, la variance, les quartiles) et avec des indicateurs de la dissymétrie et d'aplatissement.

Soit  $n f_x$  les **taux de fécondité** par âge ;  
 $n \varphi_x$  - les **éléments de calendrier de fécondité** ;  $n \varphi_x = \frac{n f_x}{\sum_{x=15}^{\omega-n} n f_x}$ ,  
 $\omega$  - la limite supérieure de l'âge fécond ;  
 $n_{\omega}$  - l'**amplitude du dernier intervalle d'âge**

Alors l'**âge moyen de fécondité** (AMF) se fabrique comme une moyenne arithmétique des âges pondérés soit par les taux de fécondité, soit par les éléments de calendrier de fécondité ainsi que la **variance  $\sigma^2$  (ou écart type  $\sigma$ ) de l'âge à la maternité** :

si  $x$  - l'**âge atteint** dans l'année :  $AMF = \bar{x} = \frac{\sum_{x=15}^{\omega-n} x \cdot n f_x}{\sum_{x=15}^{\omega-n} n f_x} = \sum_{x=15}^{\omega-n} x \cdot n \varphi_x$

si  $x$  - l'**âge révolu** :  $AMF = \frac{\sum_{x=15}^{\omega-n} (x + \frac{n_x}{2}) \cdot n f_x}{\sum_{x=15}^{\omega-n} n f_x} = \sum_{x=15}^{\omega-n} (x + \frac{n_x}{2}) \cdot n \varphi_x$

si les intervalles d'âge ( $n_x$ ) sont égaux  $AMF = \frac{n}{2} + \frac{\sum_{x=15}^{\omega-n} x \cdot n f_x}{\sum_{x=15}^{\omega-n} n f_x} = \frac{n}{2} + \sum_{x=15}^{\omega-n} x \cdot n \varphi_x$

Variance d'âge →  $\sigma^2 = \frac{\sum_{x=15}^{\omega-n} (x - AMF)^2 \cdot n f_x}{\sum_{x=15}^{\omega-n} n f_x} = \sum_{x=15}^{\omega-n} (x - AMF)^2 \cdot n \varphi_x$  sinon avec la formule de Koenig-Huygens :  
 $\sigma^2 = \sum_{x=15}^{\omega-n} x^2 \cdot n f_x - \left( \sum_{x=15}^{\omega-n} x \cdot n f_x \right)^2 = \sum_{x=15}^{\omega-n} x^2 \cdot n f_x - \bar{x}^2$

Ecart type d'âge → la racine carrée de la variance d'âge  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 12

12

### Âge moyen des mères (ou à l'accouchement) :

L'âge moyen des mères (AMMA) dépend de la structure par âge de la population féminine à la différence de l'âge moyen à la fécondité (maternité - AMF) qui est donc une caractéristique du comportement : en analyse transversale  $AMF \neq AMMA$  en règle générale

Soit  ${}_nN_x$  les naissances classées par âge des mères (à l'année de naissance) ;  
 $\omega$  – une limite supérieure de l'âge fécond

Alors on peut calculer l'âge moyen des femmes (mères) qui ont accouché (AMMA), comme une moyenne arithmétique des âges pondérés soit par les nombres des naissances chez les femmes de cet âge ainsi que la variance  $\sigma^2$ , écart type  $\sigma$  de l'âge à l'accouchement :

si  $x$  – l'âge atteint dans l'année :

$$AMMA = \frac{\sum_{x=15}^{\omega-n} x \cdot {}_nN_x}{\sum_{x=15}^{\omega-n} {}_nN_x} \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{x=15}^{\omega-n} (x - AMMA)^2 \cdot {}_nN_x}{\sum_{x=15}^{\omega-n} {}_nN_x}$$

si  $x$  – l'âge révolu :

$$AMMA = \frac{\sum_{x=15}^{50-n} \left(x + \frac{n_x}{2}\right) \cdot {}_nN_x}{\sum_{x=15}^{50-n} {}_nN_x} \quad \text{si les intervalles d'âge } (n_x) \text{ sont égaux}$$

$$AMMA = \frac{n}{2} + \frac{\sum_{x=15}^{\omega-n} x \cdot {}_nN_x}{\sum_{x=15}^{\omega-n} {}_nN_x}$$

Attention! Dans sa pratique courante l'INSEE appelle l'AMMA = l'âge moyen pondéré et l'AMF = l'âge moyen non pondéré pour les raisons inconnues

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

13

13

### Approches démographiques : les indices comparatifs de fécondité

#### les indices « épurés » d'influence de la structure de population par âge (standardisation)

##### Comment choisir un standard ?

**L'idée n°1 :** prendre la structure normalisée de la population d'une table de mortalité ( ${}_nL_x/l_0$ ), où  ${}_nL_x$  – nombre d'années vécues dans l'intervalle entre les âges  $x$  et  $x+n$  et  $l_0$  – la racine de table.

**Défauts :** 1)  ${}_nL_x$  – dépend du régime de la mortalité et non de la fécondité ;  
 2) tables de mortalité sont spécifiques au sexe.

Cependant on peut imaginer « **taux net de reproduction** » :  $TNR = \frac{\delta \cdot \sum_{x=15}^{\omega-n} f_x \cdot {}_nL_x}{l_0}$  où  $\delta$  – la part des filles parmi toutes les naissances

**Cet indicateur nous donne une mesure de remplacement des générations féminines: utile, mais hors notre objectif**

**L'idée n°2 :** en supposant que les femmes à l'âge fécond sont immortelles, on aura :  $TFG^m = \frac{n \cdot \sum_{x=15}^{\omega-n} f_x}{35}$

En multipliant par le nombre d'années vécues entre les âges 15 et 50 ans (35 au total) ce taux de fécondité globale standardisé par âge on obtient l'estimation pour le nombre total des enfants nés en moyen par une femme.

On appelle cet indicateur le **taux de fécondité totale (TFT) ou l'indice synthétique de la fécondité (ISF)**

$$ISF = n \cdot \sum_{x=\alpha}^{\omega-n} f_x$$

où  $\alpha$  – début de l'âge féconde (15 ans) ;  $\omega$  – fin de l'âge féconde (50 ans);  $n$  – amplitude de l'intervalle d'âge.

##### En approche transversale :

on attribue le jeu  $f(x)$  à une génération imaginaire (dite « fictive »)

##### En approche longitudinale :

on attribue  $f(x)$  à une génération réelle (cohorte de naissances)

On dit « **somme des taux** » (ce qui n'est pas tout à fait correcte) pour  $\alpha \neq 15$  et/ou  $\omega \neq 50$

**Interprétation 1 :** le nombre de naissance qu' l'on pourrait obtenir dans l'année, si dans chaque génération (par année d'âge) il n'y avait qu'une seule femme.

**Interprétation 2 :** le nombre moyen d'enfants pour une femme d'une génération (fictive) dont la fécondité par âge est telle qu'on observe dans l'année.

##### Synonymes de TFT/ISF :

- = fécondité globale (ligue des nations 1935, obsolète)
- = indicateur conjoncturel de fécondité;
- = taux de fécondité totale;
- = total fertility rate (eng)
- = total fertility (eng)

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

14

14

### Estimation indirecte des indicateurs de la fécondité à partir des données d'un recensement général de population ou d'une enquête sur échantillon

Estimation du TGF ( ${}_{35}\hat{f}_{15}$ ) moyen pour 5 ans qui précèdent le RGP ou une enquête :

Le rectangle **abcd** représentant le nombre d'enfants âgés 0-4 ans révolus **P(0-4)** à la date de la collecte des données et le rectangle **ABCD** l'effectif de femmes âgées de 15 à 50 ans **W(15-49)**

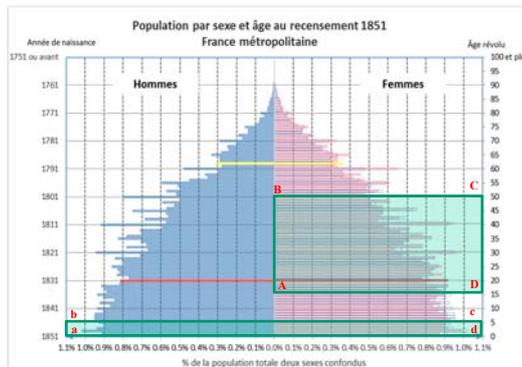
$$\text{le ratio enfants/mères (REM)} = \frac{\text{Nombre d'enfant 0-4 ans}}{\text{Nombre de femmes 15-49}}$$

Soit **B** le nombre moyen annuel de naissances durant 5 ans et son rapport à l'effectif de la population 0-4 ans est défini par la (table) de mortalité du moment :

$$\frac{B}{P(0-4)} \approx \frac{l_0}{{}_5L_0} \rightarrow B = \frac{P(0-4) \cdot l_0}{{}_5L_0}$$

Taux Global de Fécondité / Taux de fécondité générale :

$${}_{35}\hat{f}_{15} = \frac{l_0 \cdot P(0-4)}{{}_5L_0 \cdot W(15-49)} = REM \cdot \frac{l_0}{{}_5L_0}$$



Pour la France en 1851  ${}_5L_0 \approx 4003$  avec  $S_0=1000^*$  et  $REM = \frac{3\ 321\ 819}{9\ 355\ 995} = 0,355$  Problème : une sous-estimation du nombre d'enfant âgés de 4 ans à la déclaration (arrondi à 5)

Taux estimé de fécondité générale pour la période 1847-1851  ${}_{35}\hat{f}_{15} = \left(0,355 \cdot \frac{1000}{4003}\right) \cdot 1000 = 83,75\%$

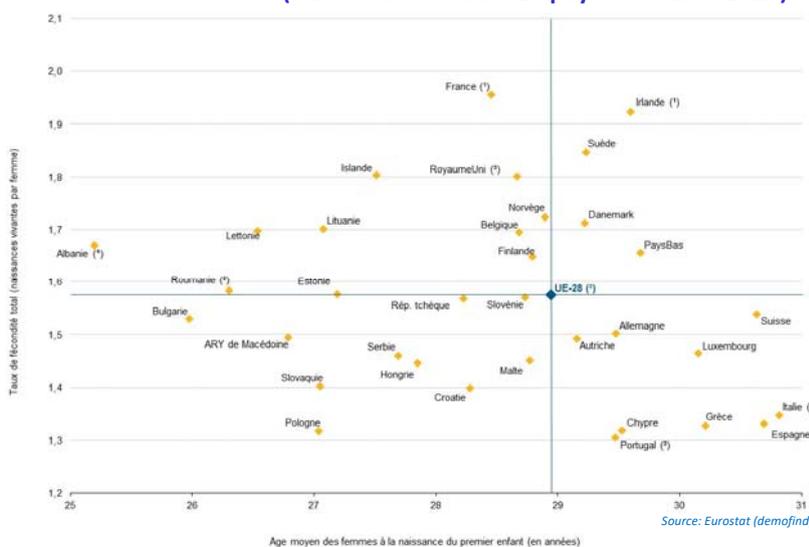
On peut estimer la fécondité totale (taux de fécondité totale / indice synthétique de fécondité)  $\rightarrow TFT = \frac{{}_{35}\hat{f}_{15}}{1000} = 35 \cdot \frac{83,75}{1000} = 2,93$

\* cf. Human mortality data base <https://www.mortality.org/> ou

N. Bonneuil «Table de mortalité France et par département et tables de migration nette par département, 1806-1906», INED <https://table-mortalite-bonneuil.site.ined.fr/>

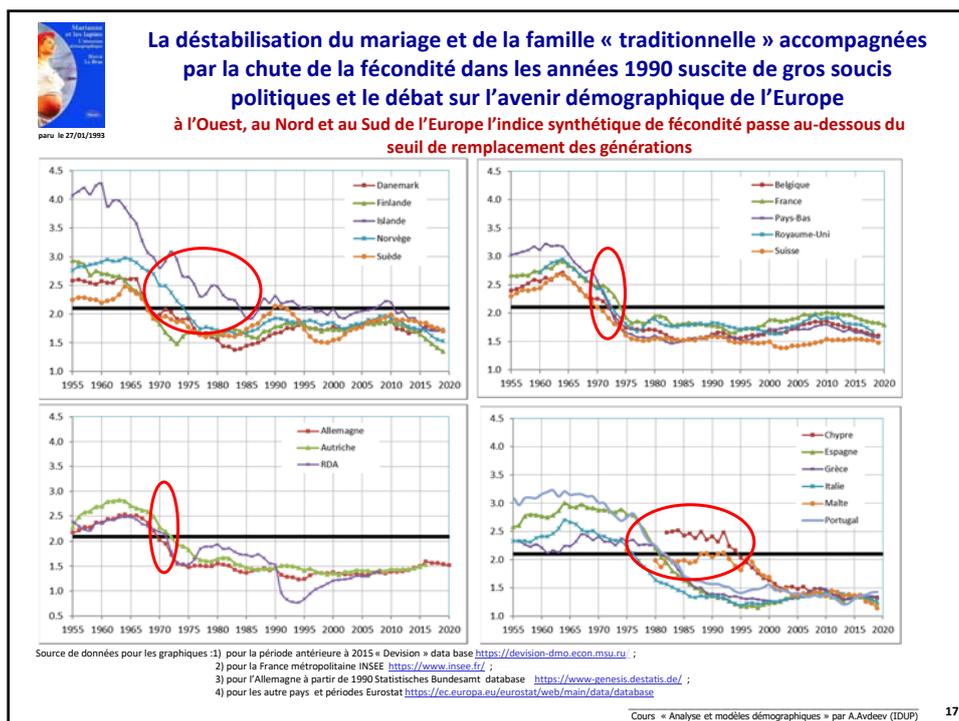
15

### Les indicateurs intégraux : réduction de l'information facilite les comparaisons internationales (ex.: TFT x AMF dans 28 pays de l'UE en 2015)

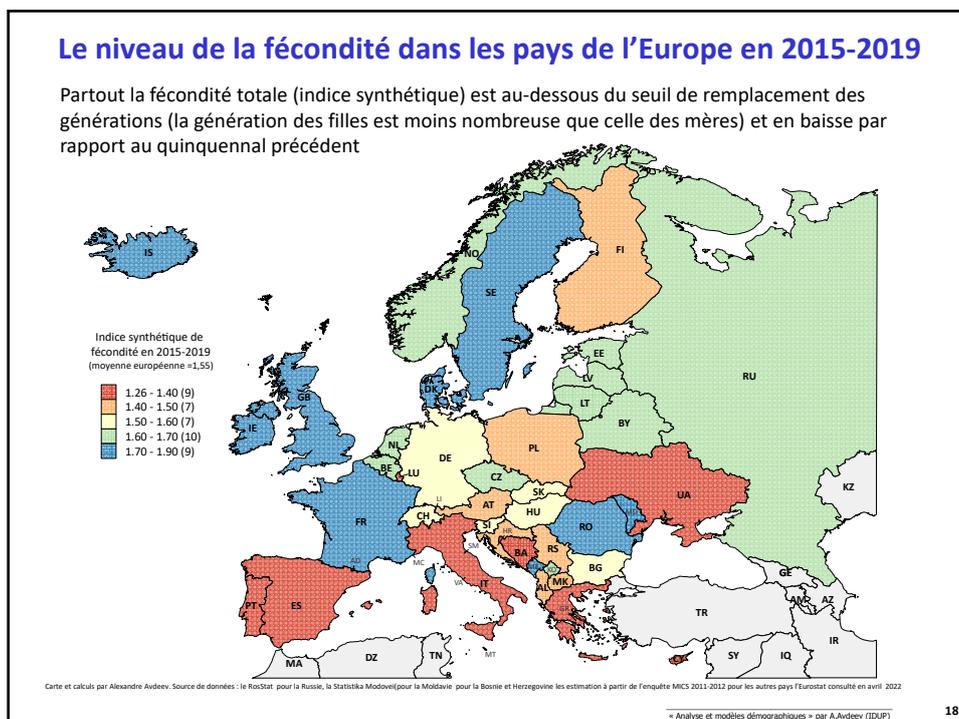


Les États membres de l'Union peuvent être divisés en quatre groupes distincts sur la base de leur situation par rapport à la moyenne de l'UE-28.

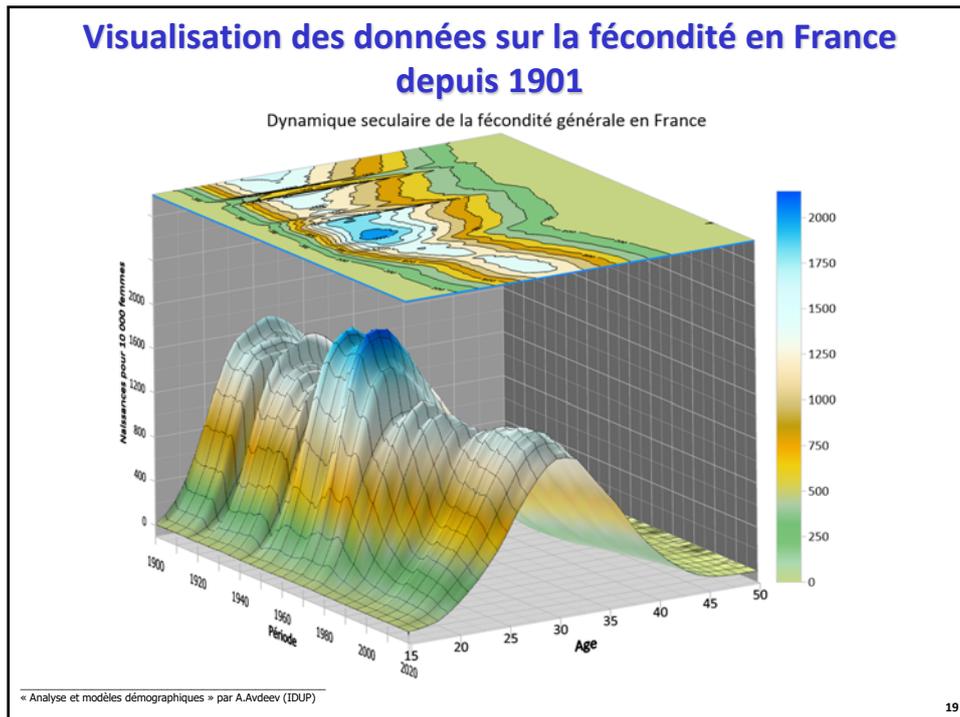
16



17



18



19



20

### Analyse transversale de la fécondité par rang de naissance :

NB : on utilise les taux de deuxième catégorie qui sont additifs : avec dénominateur commun

Soit  ${}_nW_x$  l'effectif des femmes d'âge entre  $x$  et  $x + n$  indépendamment de leur descendance

${}_nN_x^i$  le nombre de naissances de rang (de parité)  $i$  chez les femmes d'âge entre  $x$  et  $x + n$

le taux de fécondité de rang  $i$  par âge des mères  ${}_n f_x^i = \frac{{}_n N_x^i}{{}_n W_x}$

Alors  $ISF^i = n \cdot \sum_{x=\alpha}^{\omega-n} {}_n f_x^i$  – indice synthétique de fécondité de rang  $i$   
 interprétation : le nombre moyen d'enfants de rang  $i$  (nés vivants) par une femme dans une génération fictive

Puisqu'on utilise dans ces calculs les taux de deuxième catégorie les  $ISF^i$  se résument par addition en l'ISF général :  $ISF = \sum_{k=1}^m ISF^i = n \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{x=\alpha}^{\omega-n} {}_n f_x^i$

Pour chaque rang de naissance on peut calculer l'âge moyen de la fécondité (de rang  $i$ ) :

$$AMF^i = \frac{n}{2} + \frac{\sum_{x=15}^{49-n} x \cdot {}_n f_x^i}{\sum_{x=15}^{49-n} {}_n f_x^i} = \frac{n}{2} + n \cdot \frac{\sum_{x=15}^{49-n} x \cdot {}_n f_x^i}{ISF^i}$$

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 21

21

### Problème d'analyse des intervalles entre les naissances (intervalles génésiques) dans la dimension transversale

On peut toujours estimer la durée d'un intervalle entre les naissances ( $I^i$ ) comme une différence entre les âges moyens à maternité des rangs consécutifs :  $I^i = AMF^{i+1} - AMF^i$  dans ce cas on utilise l'âge comme une variable explicative. Donc l'intervalle dépend de l'âge. Cependant la causalité réelle est inverse: c'est l'âge à la maternité qui dépend de la durée de l'intervalle. (Les intervalles peuvent être égaux chez les femmes qui commencent leur procréation aux âges différents. Donc l'égalité des intervalles ne signifie pas l'égalité des âges.)

Taux de fécondité selon le rang de naissance par âge des mères (Russie, 1998)

Éléments de calendrier de fécondité selon le rang de naissance par âge des mères (Russie, 1998)

Avec une telle approche il peut arriver que les intervalles estimés deviennent inférieurs à la durée naturelle de grossesse, voire il peuvent se réduire au zéro et même devenir négatifs, à cause de la hétérogénéité des comportements procréatifs.

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 22

22

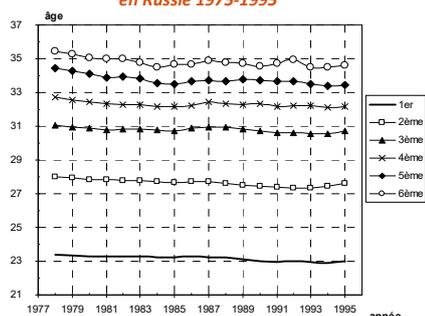
### Problème d'estimation des intervalles génésiques moyennes d'une génération fictive (transversale) $\bar{I}_i = AMM_i - AMM_{i-1}$

On peut toujours imaginer que l'intervalle génésique moyen de l'ordre  $a$  est égal à la différence des âges moyens à la maternité :  $\bar{I}_i = AMM_i - AMM_{i-1}$

Cette approche ne convient pas pour l'analyse transversal puisqu'elle donne des résultats non satisfaisants à cause de faible écart entre les AMM voisins (surtout pour les naissances de rangs élevés)

Une autre approche a été proposée par Avdeev et Monnier (1994)\*

Age moyen de la fécondité par rang en Russie 1975-1995



Si la distribution des intervalles entre les naissances successives est inconnue, on peut imaginer que :

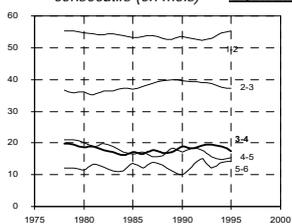
$$\bar{I}_i = \frac{AMM_i - AMM_1}{i}$$

Toutefois, cette méthode ne donne pas de solution idéale et définitive pour une estimation de la durée des intervalles génésiques dans l'analyse transversale, parce qu'elle néglige la possibilité de surestimation de l'âge moyen de la fécondité de premier rang pour les femmes ayant plusieurs enfants (certaines femmes ont très tardivement leurs premiers enfants)

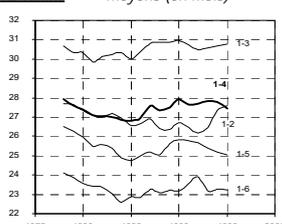
\* A.Avdeev, A.Monnier (1994) « A la découverte de la fécondité russe contemporaine » Population, vol.49, n° 4-5, p.859-901

### Illustration: Intervalles génésiques moyens et les différences entre les âges moyens à la fécondité de rangs consécutifs (Russie, 1975-1995)

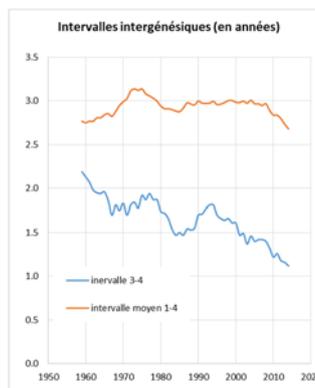
A. Ecart des âges moyens consécutifs (en mois) Population urbaine



B. Intervalles génésiques moyens (en mois) Population rurale



Comparaison des estimations de l'intervalle génésique moyen pour les naissances 1-4 et l'intervalle entre les âges moyens à la fécondité de rang 3 et 4 (population totale)



Source: Avdeev, Monnier (1994)

Source: Human fertility database

## Approche longitudinale de l'analyse : fécondité des générations et la probabilité d'agrandissement de la famille

25

### Fécondité des générations (l'analyse longitudinale) :

Si on ne prend pas en considération le rang de naissance, la fécondité est **un phénomène démographique renouvelable**.

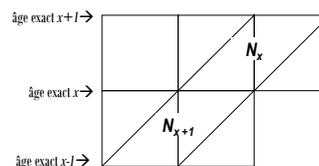
Soit dans une enquête rétrospective :

$P_{15}^F = P_{16}^F = \dots = P_x^F = \dots = P_{49}^F \rightarrow$  femmes survivantes au 50<sup>e</sup> anniversaire

$N_x$  – le nombre de naissances que ces femmes ont eu dans l'intervalle d'âge  $x$  (révolu)

$f_x$  – les naissances réduites à l'âge  $x$  pour une génération féminine atteint l'âge 50

$$f_x = \frac{N_x}{P_{50}^F}$$



La fécondité totale d'une génération appelée généralement **la descendance finale (DF)**, et que l'on obtient par addition des naissances réduites, représente ainsi **le nombre moyen d'enfants par femme** :

$$DF = \sum_{x=15}^{49} f_x = \sum_{x=15}^{49} \frac{N_x}{P_{50}^F} = \frac{1}{P_{50}^F} \sum_{x=15}^{49} N_x = \frac{\sum_{x=15}^{49} N_x}{P_{50}^F}$$

Pour les groupes d'âge quinquennaux la formule devient :  $DF = n \cdot \sum_{x=15}^{50-n} f_x = \frac{\sum_{x=15}^{50-n} n \cdot N_x}{P_{50}^F}$

26

### Âge moyen de fécondité (à la maternité) d'une génération :

A la base de la densité de la fécondité  $f(x)$  on peut calculer les caractéristiques statistiques du calendrier de la fécondité :

**l'âge moyen à la maternité ou de fécondité (AMF)**, comme moyen des âges pondérés par le nombre des naissances ( $N_x$ ) ou par les naissances réduites ( $f_x$ ) :

si  $x$  – l'âge atteint dans l'année

$$AMF = \frac{\sum_{x=15}^{49} x \cdot N_x}{\sum_{x=15}^{49} N_x} = \frac{\sum_{x=15}^{49} x \cdot \frac{N_x}{P_{50}^F}}{\sum_{x=15}^{49} \frac{N_x}{P_{50}^F}} = \frac{\sum_{x=15}^{49} x \cdot f_x}{\sum_{x=15}^{49} f_x}$$

si  $x$  – l'âge révolu

$$AMF = \frac{\frac{n}{2} + \frac{\sum_{x=15}^{50-n} x \cdot N_x}{\sum_{x=15}^{50-n} N_x}}{2} = \frac{\frac{n}{2} + \frac{\sum_{x=15}^{50-n} x \cdot f_x}{\sum_{x=15}^{50-n} f_x}}{2}$$

pour une génération la pondération par les taux et la pondération par le nombre de naissance **sont équivalentes**

**la variance  $\sigma^2$  et l'écart type  $\sigma$  de l'âge à la maternité.**

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{x=15}^{50-n} (x - AMF)^2 \cdot N_x}{\sum_{x=15}^{50-n} N_x} = \frac{\sum_{x=15}^{50-n} (x - AMF)^2 \cdot f_x}{\sum_{x=15}^{50-n} f_x}$$

27

### Fécondité par rang : événements non renouvelables

Les enquêtes rétrospectives fournissent l'information nécessaire pour calculer les naissances de rang  $k$  réduites à l'âge «  $x$  » dont la somme représente la descendance de rang  $k$  (nombre moyen d'enfants de rang  $k$ ) pour une génération (en fait cette descendance n'est qu'une proportion des femmes ayant **au moins  $k$**  enfants à l'âge 50 (celles qui ont connu la naissance de leur  $k^{\text{ème}}$  enfant).

Soit  $DF$  la descendance finale dans une génération et  $DF(k)$  – la descendance (finale) de rang  $k$

$$DF(k) = \sum_{x=15}^{49} f_x(k) \quad \text{et} \quad DF = DF(1) + DF(2) + \dots + DF(k) + \dots + DF(m)$$

par conséquent  $DF = \sum_{k=0}^m \sum_{x=15}^{49} f_x(k)$  la descendance finale est la double somme des taux de fécondité par âge et par rangs.

**$DF(k) < 1$** , bien que la descendance finale de rang  $k$  puisse théoriquement être égale à 1 (toutes les femmes ont  $k^{\text{ème}}$  enfant), mais telle situation est peu probable à cause de l'infécondité pathologique etc.

On voit que la  $DF$  d'une génération réelle est un équivalent de ISF (ou TFT) d'une génération fictive.

28

## Analyse de la fécondité par rang de naissances : probabilité d'agrandissement de la famille (PAF)

Conclusion de l'analyse précédente :

- Le niveau de fécondité des générations ne dépend presque pas de sa structure par âge (de calendrier de fécondité)
- La variation du calendrier de fécondité (de l'âge moyen de la fécondité) a un effet conjoncturel sur le niveau de fécondité transversale (indice synthétique de la fécondité)
- Le niveau général de la fécondité (transversale) et la descendance finale des générations sont composés de **la fécondité spécifique à la parité**

29

## La probabilité d'agrandissement des familles (PAF)

Soit  $a_i$  la probabilité qu'une femme ayant  $i$  enfants donne la naissance à un autre enfant

$$a_0 = \frac{DF(1)}{1} = DF(1); \text{ Ainsi}$$

$a_0 \equiv$  proportion des femmes ayant des enfants ou  
la descendance finale de **rang 1**  $\equiv$  probabilité d'avoir au moins un enfant.

$$a_1 = \frac{DF(2)}{DF(1)};$$

Donc  $a_k$  est la probabilité d'agrandissement des familles de parité  $k$

$$a_2 = \frac{DF(3)}{DF(2)};$$

La signification exacte de la probabilité d'agrandissement des familles ( $a_k$ ) est  
suivante :

....

$$a_k = \frac{DF(k+1)}{DF(k)}$$

c'est la proportion des femmes qui ont  $k+1$  enfants parmi celles qui ont  $k$  enfants,  $\rightarrow$   
ou c'est la fréquence de passage de la parité  $k$  à la parité  $k+1$

La proportion des femmes sans enfants  $p_0$  est égale à  $p_0 = 1 - DF(1)$  et  $DF(1) = 1 - p_0$

Respectivement, soit  $p_1$  proportion des femmes ayant un enfant unique, alors  $\rightarrow$

$$p_1 = DF(1) - DF(2) \text{ et } DF(2) = DF(1) - p_1 \text{ ou } DF(2) = 1 - p_0 - p_1$$

$$p_2 = DF(2) - DF(3) \text{ et } DF(3) = DF(2) - p_2$$

$$\text{ou } DF(3) = 1 - p_0 - p_1 - p_2$$

30

### La probabilité d'agrandissement des familles (suite)

On peut décrire la probabilité d'agrandissement des familles avec une expression contenant  $p_k$  (proportion des femmes avec un enfant de parité  $k$ ) :

« arbre de probabilité »

1<sup>er</sup> enfant    2<sup>e</sup> enfant    3<sup>e</sup> enfant    4<sup>e</sup> enfant

DF 1    DF 2    DF 3    DF 4

$$a_0 = DF(1) = 1 - p_0;$$

$$a_1 = \frac{DF(2)}{DF(1)} = \frac{1 - p_0 - p_1}{1 - p_0}; \text{ etc...}$$

$$a_k = \frac{DF(k)}{DF(k-1)} = \frac{1 - \sum_{k=0}^k p_k}{1 - \sum_{k=0}^{k-1} p_k} = 1 - \frac{p_k}{1 - \sum_{k=0}^{k-1} p_k}$$

$$DF(1) = a_0;$$

$$DF(2) = a_1 \cdot DF(1) = a_1 \cdot a_0; \text{ etc...}$$

$$DF(k) = a_{k-1} \cdot DF(k-1) = \prod_{k=0}^{k-1} a_k$$

$$DF = \sum_{k=1}^{\omega} DF(k) = a_0 + a_0 a_1 + \dots + \prod_{j=0}^{\omega-1} a_j$$

**Pour l'intervalle fermé-ouvert (décomposition de la  $DF_{n+}$ ) :**

1° Hypothèse de la probabilité constante (progression géométrique)  $a_{n+} = 1 - \frac{DF_{n-1}}{DF_{n+}}$  ; avec  $n+ = \{n, n+1, n+2 \text{ etc.}\}$ , et  $DF_{n+} = DF - \sum_{i=1}^{n-1} DF_i$

2° Hypothèse sur la distribution binomiale des femmes avec n enfants et plus (la solution un peu plus difficile)

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 31

31

### La probabilité d'agrandissement de la famille (illustration)

Totalité des femmes = 100% = =  $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \dots \equiv 1$

$p_0$  proportion de femme sans enfants

$p_1$  proportion de femme avec 1 enfant

$p_2$  proportion de femme avec 2 enfants

$p_3$  proportion de femme avec 3 enfants et plus

$p_0 = 1 - DF_1$

$p_1 = DF_1 - DF_2$

$p_2 = DF_2 - DF_3$

$DF_3$  proportion de femme avec 3 enfants et plus

$a_0 = \frac{DF_1}{1} = \frac{DF_1}{DF_0}$

$a_1 = \frac{DF_2}{DF_1}$

$a_2 = \frac{DF_3}{DF_2}$

$a_n = \frac{DF_n}{DF_{n-1}}$

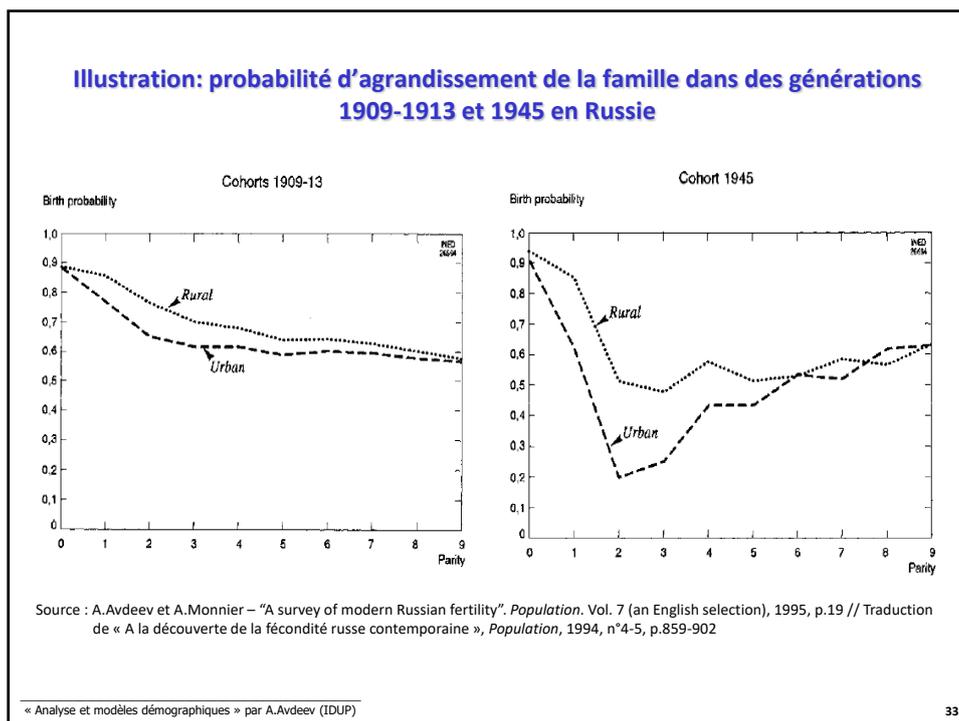
$a_1 = DF_2 / DF_1$  probabilité d'agrandissement de la famille avec 1 enfant

$a_2 = DF_3 / DF_2$  probabilité d'agrandissement de la famille avec 2 enfants et plus

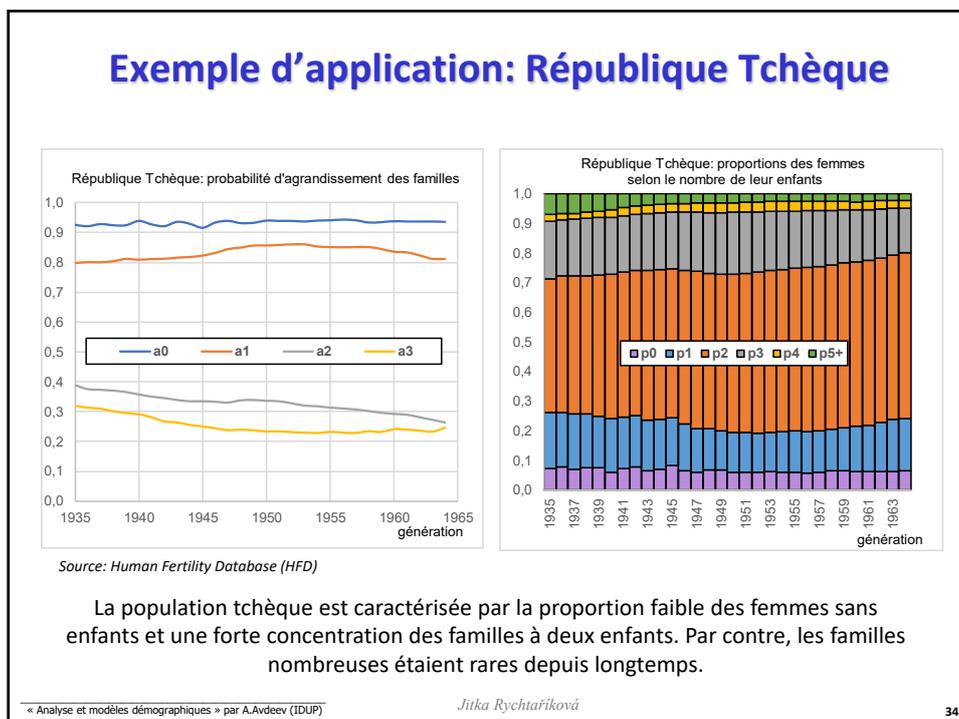
$a_n = DF_n / DF_{n-1}$  probabilité d'agrandissement de la famille sans enfants

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 32

32



33



34

## Calendrier de la fécondité des générations

Avec les taux de fécondité *par âge et par rang* on peut estimer **approximativement** les intervalles entre les naissances :

- ✓ les intervalles moyens entre les naissances (intervalle génésique)

$$\hat{I}_{k,k+1} = AMF_{k+1} - AMF_k$$

- ✓ l'intervalle proto-génésique (soit entre l'âge de mariage ou celui de début de la vie sexuelle, ou, s'il n'a y pas de mieux, entre l'âge de 15 ans et l'âge au première naissance).

Parfois c'est l'âge moyen à la première naissance que l'on considère comme un intervalle proto-génésique

On peut aussi présenter **la descendance finale** comme **une moyenne arithmétique des rangs pondérés** avec des proportions des femmes qui ont eu  $k$  naissances (de parité  $k$ ).

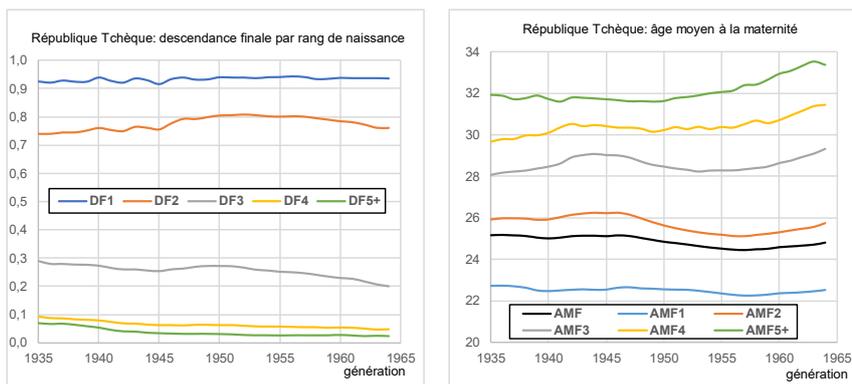
$$DF = \frac{\sum_{k=0}^{\omega} k \cdot P_k^F}{\sum_{k=0}^{\omega} P_k^F} = \sum_{k=0}^{\omega} k \cdot p_k$$

où  $p_k$  est la proportion des femmes avec  $k$  enfants.

$$p_k = \frac{P_k^F}{\sum_{k=0}^{\omega} P_k^F}$$

35

### Fécondité par rang: approche longitudinale



Source: Human Fertility Database (HFD)

La fécondité par génération a été stable en République Tchèque du point de vue de l'intensité et aussi en ce qui concerne le calendrier. **Le pourcentage des femmes sans enfant (1-DF1)** a été faible de 6-8 %. Les changements récents du comportement procréateur n'ont pas encore touché ces générations féminines.

Ces femmes ont eu leurs enfants dans la période 1950-1990 (avant les changements politiques et les transformations économiques). Dans le contexte européen le niveau de fécondité a été plutôt bas avec un calendrier jeune.

36

**Défauts des enquêtes rétrospectives :**

- Le point de départ est une **génération rétrospective** (l'événement constituant une cohorte n'est pas de fait l'année de naissance, mais l'âge atteint au moment d'enquête ou au présent) dont on étudie l'histoire de vie (études biographiques)
- L'effet de sélection (ou de troncature) à cause de la migration et la mortalité qui sont sélectives
- L'effet d'oubli : les enfants morts aux âges précoces sont souvent « oubliés » (non déclarés). L'oubli augmente avec l'âge

**Solution :** augmenter le nombre des questions relatives à l'histoire génésique, mais cela coûte cher, sinon on peut calculer les indicateurs pour la *génération prospective*

**Les indicateurs de la fécondité des générations à partir de données d'état civil :**

- Le point de départ est une **génération prospective** (l'événement constituant une cohorte est l'année de naissance sans aucun rapport avec le présent) on suit donc l'histoire d'une génération à partir des taux de fécondités historiques
- L'effet de la migration et de la mortalité sélectives pourraient provoquer un écart (positif ou négatif) entre les nombre moyen d'enfant par femme d'une génération rétrospective et la descendance finale de la même génération prospectives
- pour une génération d'année de naissance « g », qui atteint l'âge 50 dans l'année « t » (donc,  $g = t - 50$ ) les estimations suivantes sont correctes :

taux de fécondité à l'âge x atteint  $f_x^g = \frac{N_x^g}{0,5 \cdot (F_{x-1}^g + F_x^g)}$  où  $x = 15 \div 50$  

taux de fécondité à l'âge révolu (sur deux année consécutives)  $f_{x+0,5}^g = \frac{N_{x+0,5}^g}{F_{x+0,5}^g}$  où  $x = 15 \div 49$  

et la descendance finale) :  $DF^g = \sum_{15}^{49} f_x^g$

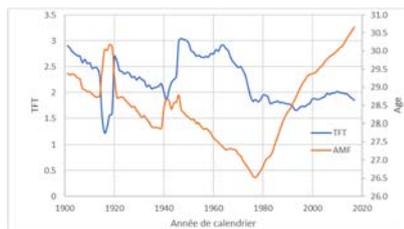
« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

37

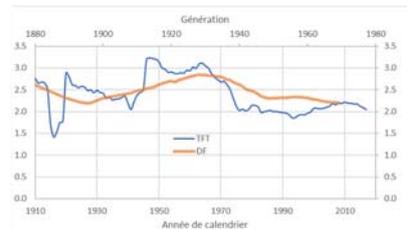
37

## Translation : l'interférence des indicateurs transversaux et longitudinaux

Niveau de fécondité total et âge moyen à la maternité en France



Niveau de fécondité total transversale et descendance finale des générations en France



38

### Influence du « quantum » de la fécondité sur l'âge moyen (« tempo »)

Il est possible d'exprimer l'âge moyen de la fécondité tous rangs confondus (AMF) comme une moyenne arithmétique pondérée des âges moyens à la maternité de chaque parité (AMF<sub>i</sub>)

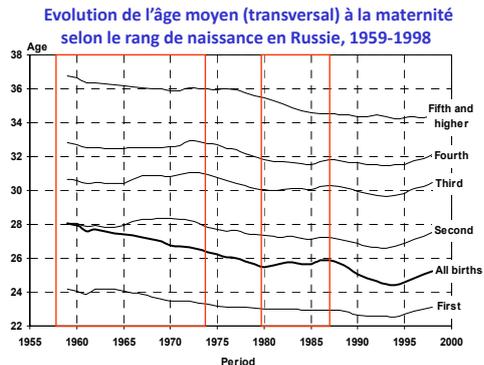
$$AMF = AMF_1 \cdot w_1 + AMF_2 \cdot w_2 + AMF_3 \cdot w_3 + AMF_{4+} \cdot w_{4+}$$

où  $w_i = \frac{ISF_i}{ISF}$  - part de la fécondité de rang *i* dans la fécondité totale

Ainsi, le changement dans le niveau de la fécondité selon le rang (*quantum*) a une influence directe sur l'âge transversal à la maternité (*tempo*).

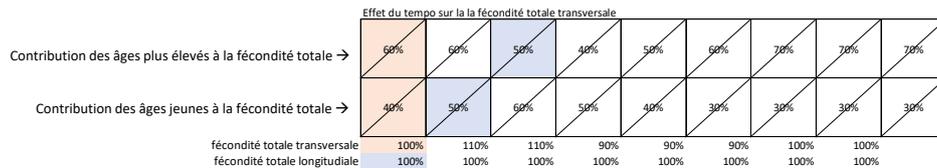
Par ex.: si la diminution de la fécondité de rangs 3 et 4+ est plus rapide que la diminution de la fécondité de rangs 1 et 2, l'AMF tous rangs confondus diminue, mais les AMF<sub>i</sub> (à chaque rang) augmentent.

On observe ce phénomène aux Etats-Unis entre 1964 et 1975 (Bongaarts-Feeney, 1998) et, dans les années 1960, en Russie où cette tendance s'est renversée entre 1982 et 1987 (Avdeev, 2003)



Bongaarts, J. and G. Feeney (1998) – "and Eastern EOn the quantum and tempo of fertility". *Population and Development Review*, 1998, vol. 24 no 2, p. 271-291  
 Avdeev A.A. (2003) "On the way to one-child family: are we beyond the point of no return? Some considerations concerning the fertility decrease in Russia", dans : Irena E. Kotowska and Janina Izwiak (dir.) *Population of Central urope: challenges and opportunities*. Varsovie, pp.139-163.

### Pli de Ryder où l'effet de la 'translation' ou de l'interférence entre le tempo (changement du calendrier) et le quantum (le niveau) de la fécondité

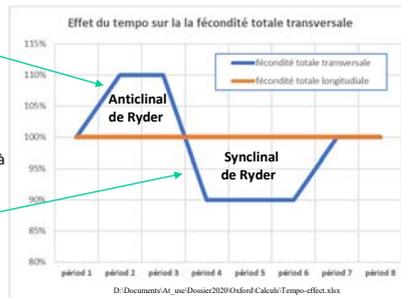


• A la fin de la transition démographique la fécondité des générations devient plus jeune à cause de la disparition des naissances des rangs élevés; dans cet exemple on voit le passage du rapport 40/60 à d'abord 50/50 et ensuite à 60/40 :

- TFT transversal > TFT longitudinal (DF) } Anticlinical de Ryder
- TFT transversal augmente
- toutefois l'âge moyen à la primo-fécondité ne bouge pas trop...
- si la fécondité des générations (longitudinale) diminue, cela n'est pas affiché par la dynamique des indicateurs transversaux

• La fécondité des générations (longitudinale) recule vers les âges plus élevés à cause de la "gender transition" où la seconde transition démographique (?)

- TFT transversale < TFT longitudinale (DF) } Synclinal de Ryder
- TFT transversale diminue habituellement
- si la fécondité des générations diminue, cela est accompagnée par la diminution exagérée de l'indicateur conjoncturel
- inversement, l'augmentation de la fécondité des générations n'est pas affichée (cachée) par la dynamique de l'indicateur conjoncturel



Démonstrations mathématiques sont présentées en détails dans :

Ryder, N. (1964) – "The process of demographic translation". *Demography*, 1964, Vol. 1 no.1, p. 74-82  
 Bongaarts, J. and G. Feeney (1998) – "On the quantum and tempo of fertility". *Population and Development Review*, 1998, vol. 24 no 2, p. 271-291

## L'interaction entre la structure du cycle de vie et le niveau de la fécondité (changement dans le calendrier)

Ryder, N. – "The process of demographic translation". Demography, 1964, Vol. 1 no.1, p. 74-82.  
Bongaarts, J. and G. Feeney (1998) – "On the quantum and tempo of fertility". Population and Development Review, 1998, vol. 24 no 2, p. 271-291

### « Formule de Bongaarts-Feeney »

pour mesurer l'influence des changements dans le calendrier de fécondité (tempo) sur l'indicateur conjoncturel (quantum) réexaminer le graphique gauche sur la diapositive 9. **convient pour les taux spécifiques à l'âge atteint dans l'année**

$$ajTFT^t = \sum_{i=1}^n \frac{TFT_i^t}{1 - (AMF_i^{t-1} - AMF_i^t)} \quad \text{où}$$

$ajTFT^t$  - Taux de Fécondité Total (ou ISF) Ajusté aux changements de calendrier pour l'an  $t$  ;

$TFT_i^t$  - taux de fécondité total de rang  $i$  pour l'an  $t$  ;

$AMF_i^t$  - âge moyen de la fécondité de rang  $i$  pour l'an  $t$  ;

$AMF_i^{t-1}$  - âge moyen de la fécondité de rang  $i$  pour l'an  $t-1$  ;

### Explications de la formule :

$$ajTFT_i^t = \frac{TFT_i^t}{(1 - c_i^{t-1,t})} \rightarrow \text{Taux de fécondité total de rang } i, \text{ ajusté au changement de l'AMF}$$

$$c_i^{t-1,t} = AMF_i^t - AMF_i^{t-1} \rightarrow \text{Variation de l'âge moyen de la fécondité de rang } i$$

$$ajTFT^t = \sum_i ajTFT_i^t$$

Taux de fécondité total de fécondité ajusté aux changement de calendrier

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

41

41

## Formule de Bongaarts –Feeney précisée pour les taux spécifiques à l'âge révolu

La méthode d'ajustement proposée par Bongaarts et Feeney (1998) estime le taux de fécondité totale (alias l'indice synthétique de fécondité) en l'absence de modifications de calendrier dues à l'anticipation ou au report des naissances. On le calcule, séparément pour chaque rang de naissance, par la formule (taux de deuxième catégorie; AMF à partir des taux de deuxième catégorie) :

$$ajTFT^t = \sum_i ajTFT_i^t \quad ajTFT^t - \text{Taux de Fécondité Totale ajusté au changement de l'AMF par rang de naissance dans l'année } t$$

$$ajTFT_i^t = \frac{TFT_i^t}{1 - r_i} \quad ajTFT_i^t - \text{Taux de Fécondité Totale de rang } i \text{ ajusté au changement de l'AMF de ce rang de naissance dans l'année } t$$

Si on suppose que l'AMF varie entre le début et la fin de l'année d'étude (au cours de l'année  $t$ ), on peut quantifier cette variation comme le suit :

$$r_i = 0,5 \cdot (AMF_i^{t-1} + AMF_i^t) - 0,5 \cdot (AMF_i^t + AMF_i^{t+1}) = \frac{AMF_i^{t-1} - AMF_i^{t+1}}{2}$$

Ainsi dans ces calculs  $r_i$  se fabrique comme une différence des âges moyens à la maternité de rang  $i$  de l'année  $t-1$  et  $t+1$  et la formule de Bongaarts-Feeney se précise:

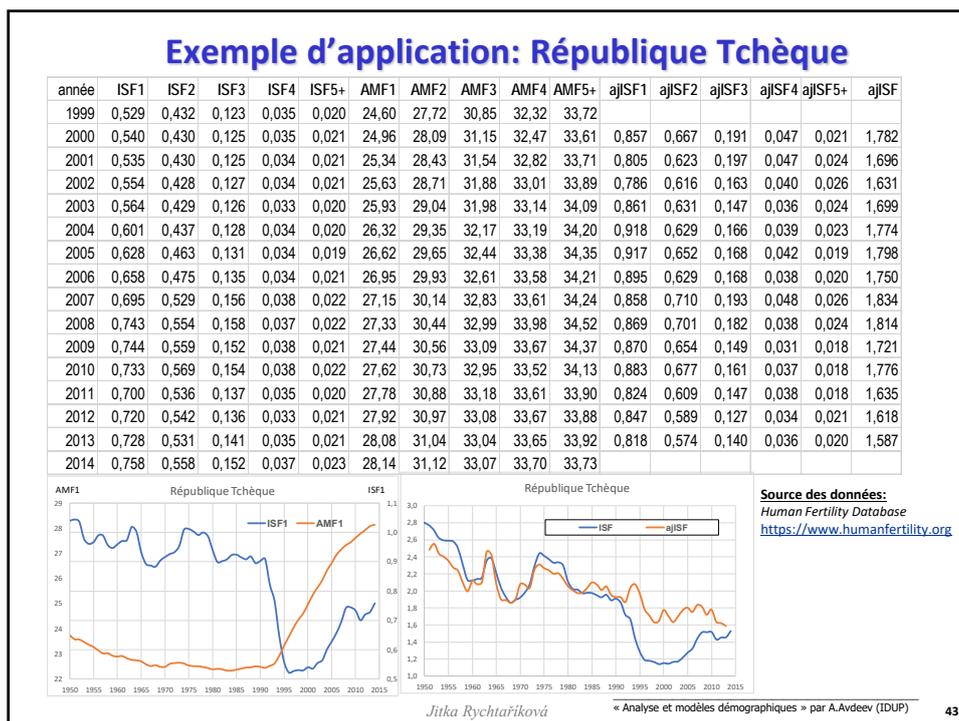
$$ajTFT^t = \sum_{i=1}^n \frac{TFT_i^t}{1 - 0,5 \cdot (AMF_i^{t-1} - AMF_i^{t+1})}$$

Cependant cette précision bien qu'elle soit irréprochable du point de vue mathématique demande d'allonger la période d'observation de deux à trois ans pour quantifier l'influence du changement de calendrier (du tempo) sur le niveau de fécondité (quantum). Dans l'analyse de la conjoncture démographique il est donc possible d'utiliser la formule approximative (cf. diapositive précédente)

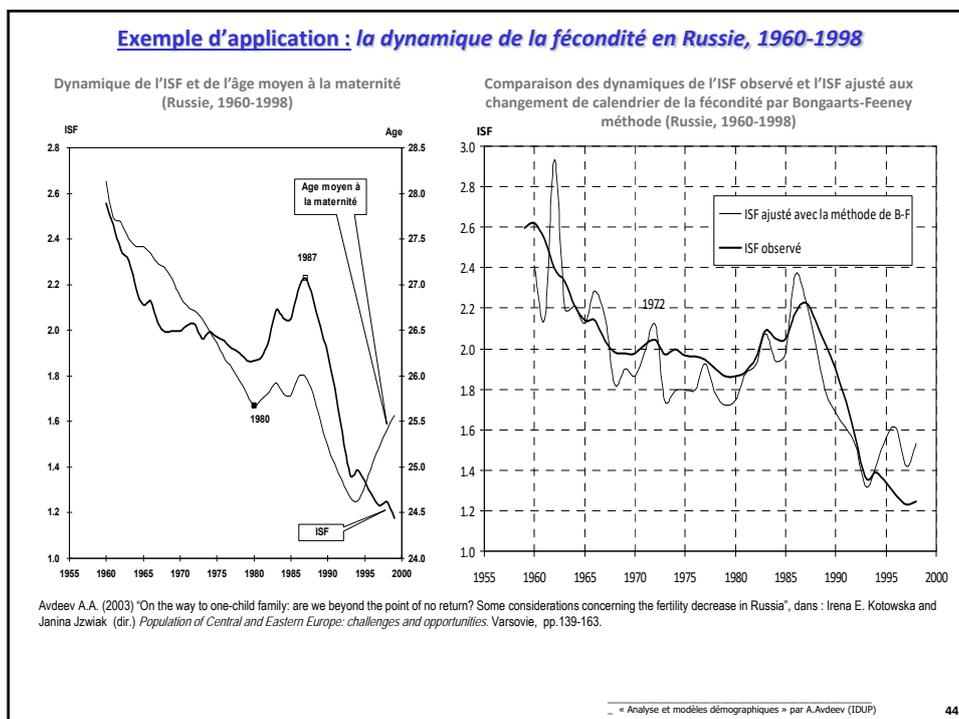
« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

42

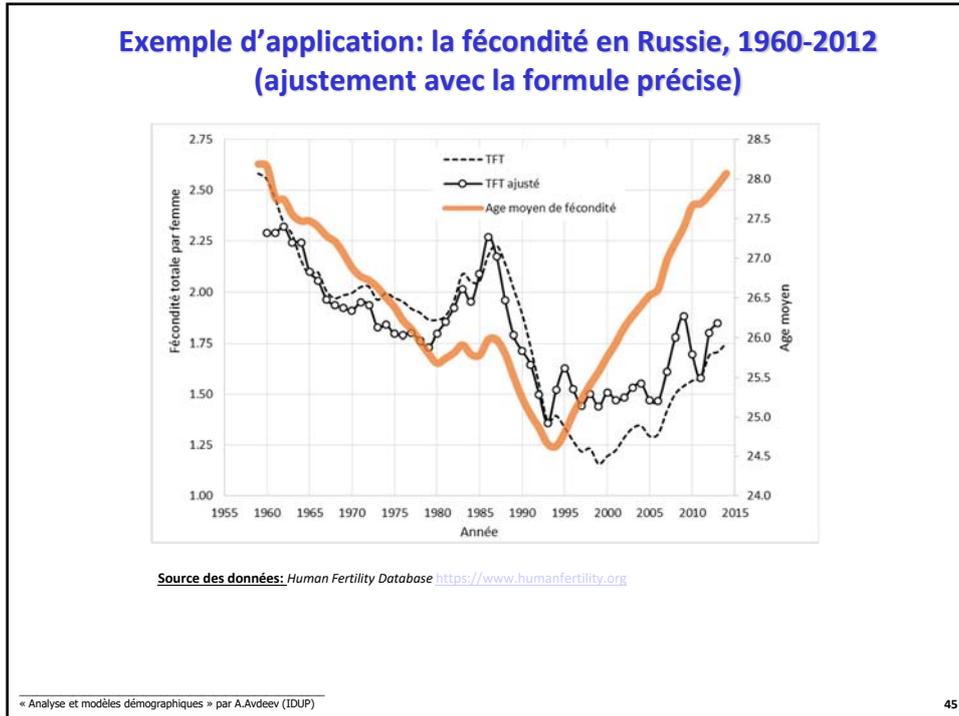
42



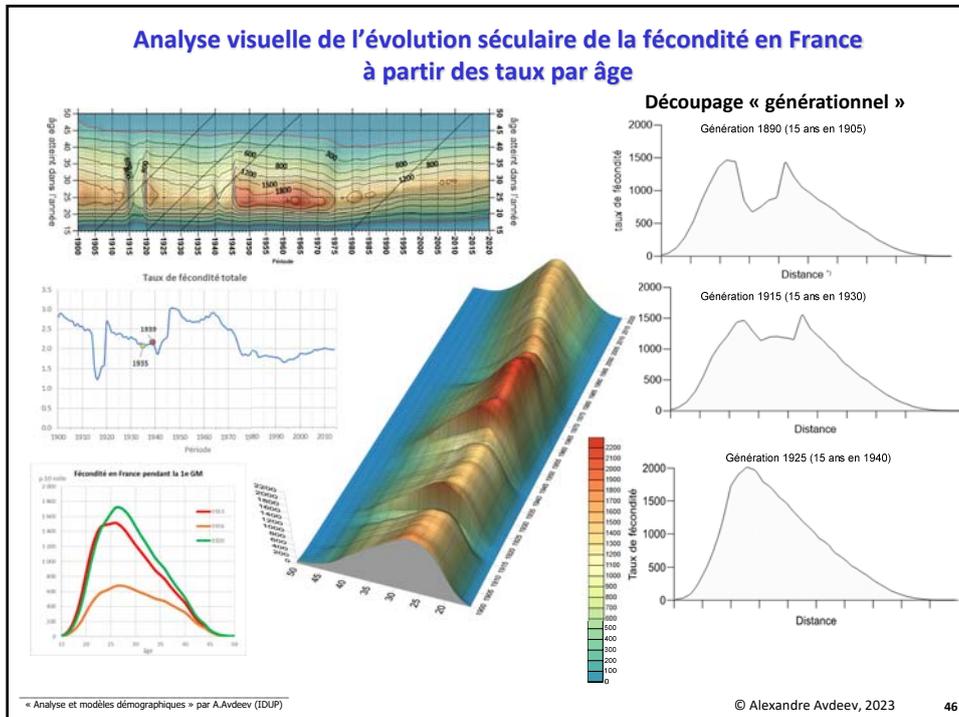
43



44



45



46

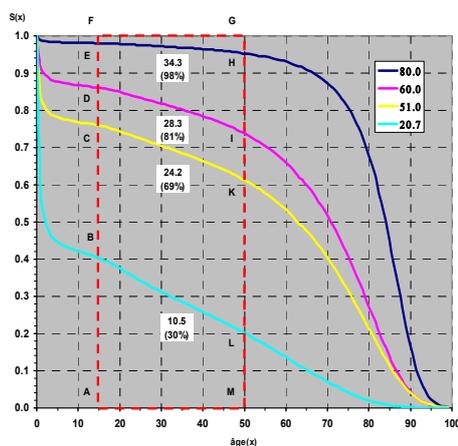
## Fécondité et la reproduction de la population (remplacement des générations)

47

### Fécondité et reproduction de la population : engrenage de la fécondité et de la mortalité (potentiel de reproduction)

La natalité (naissances) → l'équation fondamentale du mouvement de la population :  $\Delta P = N - D + SM$

La fécondité → l'équation intégrale de la reproduction de la population stable (féminine) de Lotka :  $1 = \int_0^{\infty} e^{-p \cdot x} p(x) \cdot f(x) dx$



#### Légende:

**La durée maximale** de la période féconde dans la vie féminine  
 → la surface du rectangle AFGM = (50-15) x 1 = 35 ans  
 Quatre lignes de survie correspondent à l'espérance de vie à la naissance ( $e_0$ ) de

- 20,7 ans (la Gaule cisalpine),
- 51 ans (Italie, en début des années 1920, la France vers 1914)
- 60 ans (populations européennes dans les années 1950-1960)
- 80 ans (Japon d'aujourd'hui).

Les surfaces des figures **ABLM**, **ACKM**, **ADIM** et **AEHM** correspondent au nombre d'années effectivement vécues durant la période féconde sous les régimes différents de mortalité.

#### Démonstration:

la surface ABLM = 10,5 ans, ce qui fait ~30% du maximum.  
 1) Toutes les femmes sont mariées (exposées à la fécondité)  
 2) Aucune contraception, ni IVG (fécondité « naturelle »)  
 Si les intervalles entre les naissances sont minimales (1,5 an), le nombre de naissance est égale à 10,5 : 1,5 = 7 enfants ;  
 si les intervalles sont maximales → 10,5 : 3,75 = 2,8 enfants.

La survie au-delà de l'âge 50 n'a que très peu d'influence sur le potentiel de reproduction (les mâles garde leur capacité d'engendrer : un mécanisme qui, théoriquement, permet de réduire le nombre des mâles sans affecter la reproduction, en outre cela récompense les pertes des jeunes mâles).

48

## Mesures de la reproduction (de remplacement des générations féminines)

soit  $\delta$  – la proportion des filles parmi les nouveaux nés (elle peut être spécifique à l'âge)

**Taux brut de reproduction:**  $TBR = \delta \cdot n \cdot \sum_n f_x \Rightarrow TBR = ISF \times \delta$

représentant le nombre (moyen) de filles pour une femme à la fin de l'âge de procréation (50 ans)

Cet indicateur cependant ne tient pas compte de la survie de filles avant l'âge de procréation.

Pour corriger ce défaut on pourrait ajuster la formule aux paramètres de la mortalité féminine

soit  ${}_nL_x$  et  $S_0$  sont les indicateurs d'une table de mortalité féminine, alors on peut imaginer

**Taux net de reproduction:**  $TNR = \delta \cdot \frac{\sum_n f_x \cdot {}_nL_x}{S_0}$

représentant le nombre (moyen) de filles qui atteignent l'âge de la mère pour une femme à la fin de l'âge de procréation – il s'agit de la standardisation directe avec la standard provenant de la table de mortalité

Dans cette formule

$\delta \cdot \sum_n f_x \cdot {}_nL_x$  est le nombre de naissances des filles chez la population de table de mortalité, et  $S_0$  est l'effectif initiale de la génération (racine de table)

Sinon on peut interpréter  $\frac{{}_nL_x}{S_0}$  comme la probabilité pour une nouveau-née de vivre dans l'intervalle d'âge entre x et x+n

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

49

49

âge	Naissances vivantes: filles	Femmes 1.1.2012	Femmes 1.1.2013	Table de mortalité féminine: $L_x$	Taux de fécondité par âge $f_x$ filles	$f_x \cdot L_x / 100\ 000$
14	74	383 270	392 246	99 557	0,00019	0,00019
15	198	389 041	384 849	99 545	0,00051	0,00051
16	595	387 435	389 992	99 534	0,00153	0,00152
17	1 180	377 383	387 391	99 522	0,00309	0,00307
18	2 311	373 245	375 563	99 504	0,00617	0,00614
19	4 274	388 910	371 281	99 481	0,01124	0,01119
20	6 179	392 481	385 884	99 455	0,01588	0,01579
21	8 105	397 249	389 503	99 431	0,02060	0,02049
22	10 451	396 284	394 625	99 408	0,02643	0,02627
23	13 071	398 174	393 740	99 384	0,03301	0,03281
24	16 428	394 466	396 877	99 362	0,04152	0,04125
25	19 914	400 773	394 402	99 339	0,05009	0,04976
26	23 077	398 609	402 054	99 313	0,05764	0,05725
27	25 591	398 857	399 729	99 286	0,06409	0,06363
28	26 948	391 242	400 829	99 260	0,06804	0,06754
29	28 265	418 077	394 676	99 231	0,06955	0,06902
30	29 329	423 443	420 693	99 198	0,06949	0,06893
47	82	470 242	461 685	97 894	0,00018	0,00017
48	60	464 980	469 620	97 718	0,00013	0,00013
49	34	450 596	464 847	97 531	0,00007	0,00007
50	63	451 429	449 372	97 333	0,00014	0,00014
Total					<b>0,94280</b>	<b>0,93507</b>

France métropolitaine 2012

Source: EUROSTAT

TBR=0,94280

TNR=0,93507

Jitka Rychtaříková

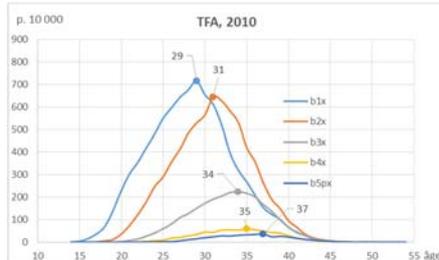
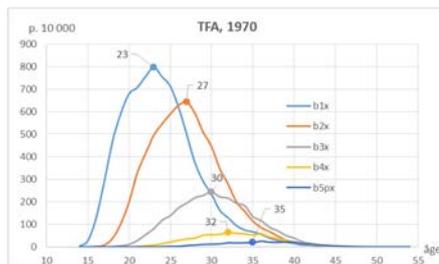
50

50

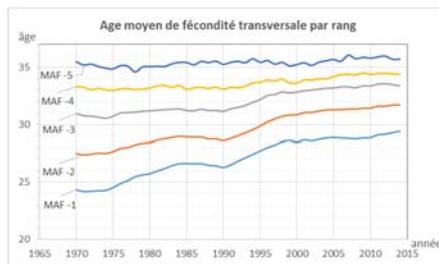
## Tables de fécondité

51

### Analyse de la fécondité transversale par rang en Suède entre 1970 et 2014



Source de données : Human Fertility DataBase, MPIDR



L'âge modal à la fécondité par rang (deux graphiques à gauche, analyse visuelle) donne une vision assez claire de la transformation dans le cycle de formation de la famille (le retardement de 6 ans pour la première naissance et de 4 ans pour la deuxième et la troisième, 3 ans pour la quatrième et 2 ans pour la cinquième et plus (intervalles : 4 → 2, 3 → 3, 2 → 1, 3 → 2; cycle : 12 → 8).

L'âge moyen à la fécondité par rang donne une image différente: 4,5 ans de retard pour la première naissance, 3,9 pour la deuxième et 2,5 pour la troisième, une année pour la quatrième et 0,3 pour la cinquième et plus (intervalles 3 → 2,5, 3 → 1,9, 2,3 → 1, 2,2 → 1,4; cycle : 11,1 → 6,9).

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

52

52

**Table de fécondité par rang de naissance (i) HFD (Human Fertility Database)**

L'analyse de la fécondité par rang doit se baser sur les taux par âge et rang (*ici indiqué i*) de première catégorie (occurrence-exposure rates, childbearing intensities)

Soit  $E_{x,i}^t$  = femmes années par âge  $x$  et parité  $i$  en  $t$

$w_{x,i}^t$  = proportion des femmes spécifique à l'âge  $x$  et à la parité  $i$  dans l'an (période) en  $t$

$B_{i,x}^t$  = naissances vivantes à l'âge  $x$ , de rang  $i$  en période  $t$

Alors effectif de la population féminine d'âge  $x$  exposée à la fécondité de rang  $i$  :  $E_{i-1}(x,t) = w_{i-1}(x,t) \cdot E(x,t)$

$$m_{i,x}^t = \frac{B_{i,x}^t}{E_{i-1,x}} \quad \text{- taux de fécondité de première catégorie (conditional age-specific fertility rates)}$$

Ensuite on omet  $t$  (la constante) des formules

La description détaillée sur <https://www.humanfertility.org/Docs/methods.pdf>

**L'attrition dans la table de fécondité**

$$q_{i,x} = \frac{m_{i,x}}{1 + (1 - a_x) \cdot m_{i,x}} \quad \text{supposant que } a_x = 0,5 \text{ (pour estimation des quotients spécifiques à l'âge et à la parité)}$$

$$l_{0,x=\min} = 10\,000 \quad \text{- la racine de table : nombre de femmes sans enfants (parité 0) à l'âge minimal (i.e. 14 ans)}$$

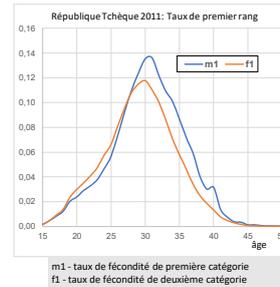
$$l_{i,x=\min} = 0 \quad \text{pour } i=1, 2, 3, 4, \text{ etc. (i.e. femmes sans enfants à l'âge minimal)}$$

$$l_{0,x+1} = l_{0,x} \cdot (1 - q_{1,x}) \quad \text{- probabilité de rester sans enfants en vieillissant (i=0 toujours)}$$

$$l_{i,x} = l_{i,x-1} - b_{i+1,x-1} + L_{i-1,x-1} \cdot m_{i,x-1} \quad \text{pour } i>0 \text{ probabilité d'avoir } i \text{ enfants à l'âge exact } x \text{ (à } x^{\text{e}} \text{ anniversaire).}$$

Lecture: celles qui n'ont pas eu de  $i+1^{\text{e}}$  naissances, + celles qui ont eu  $i^{\text{e}}$  naissance

$$l_{i+1,x} = l_{i+1,x-1} + L_{i-1,x-1} \cdot m_{i,x-1} \quad \text{pour } i=4 \text{ (et plus), la parité absorbante (i+)}$$



m1 - taux de fécondité de première catégorie  
f1 - taux de fécondité de deuxième catégorie

Jitka Rychtaříková

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

53

53

**Éléments et la structure de la table de fécondité**

$q_{i,x}$  - quotient de fécondité de rang  $i$  à l'âge  $x$ . C'est la probabilité pour une femme d'âge  $x$  ayant  $i-1$  enfants en début d'année de mettre au monde un enfant

$l_{i,x}$  - nombre de femmes à l'âge  $x$  de parité  $i$  dans la table de fécondité avec une racine (population de départ) de 10 000 personnes

$b_{i,x}$  - nombre de naissances de la table de rang  $i$  dans l'intervalle d'âge  $[x, x+1)$

$L_{i,x}$  - nombre d'années-femmes de parité  $i$  vécues dans l'intervalle d'âge  $[x, x+1)$

$$b_{i,x} = L_{i-1,x} \cdot m_{i,x}$$

$$L_{i,x} = l_{i,x} - l_{i,x} \cdot q_{i+1,x} \cdot (1 - a_x) \quad \text{pour } i = 0$$

$$L_{i,x} = l_{i,x} + l_{i-1,x} \cdot q_{i,x} \cdot (1 - a_x) - l_{i,x} \cdot q_{i+1,x} \cdot (1 - a_x) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

$$L_{i+1,x} = l_{i+1,x} + l_{i-1,x} \cdot q_{i,x} \cdot (1 - a_x) \quad \text{pour } i = 4$$

$$Sb_{i,x} = \sum_{z=x(\min)}^{x-1} b_{i,z} \quad \text{pour } i=1,2,3,4,5+ \text{ (descendance de rang } i \text{ spécifique/atteint vers l'âge } x)$$

**Taux de fécondité totale de table spécifique à la parité**  
(the parity- and age adjusted total fertility rate by birth order):

$$PATFR_i = \frac{\sum_x b_{i,x}}{l_{0,x=\min}} \rightarrow \frac{\sum_x b_{i,x}}{10\,000}$$

PATFR=ISFRA l'indice synthétique de fécondité tenant compte du rang et de l'âge (Rallu, Toulemon, 1993)

**Age moyen à fécondité de rang  $i$  de table :**

$$TMAB_i = \frac{\sum_x \bar{x} \cdot b_{i,x}}{\sum_x b_{i,x}}$$

**Taux de fécondité totale de table**  
(the parity- and age adjusted total fertility rate):

$$PATFR = \frac{\sum_x \sum_x b_{i,x}}{l_{0,x=\min}} = \frac{\sum_x b_x}{l_{0,x=\min}} \rightarrow \frac{\sum_x b_x}{10\,000}$$

**Age moyen de la fécondité de table :**

$$TMAB = \frac{\sum_x \bar{x} \cdot b_x}{\sum_x b_x}$$

Jean-Louis Rallu and Laurent Toulemon : « Les mesures de la fécondité transversale. I. Construction des différents indices. » *Population* (French Edition), Vol. 48, No. 1 (Jan. - Feb., 1993), pp. 7-26

Jitka Rychtaříková

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

54

54

**Table de fécondité de premier rang: République Tchèque, HFD**

Year	x	w0x	m1x	q1x	l0x	b1x	L0x	Sb1x
2011	-12	1,00000	0,00002	0,00002	10000	0	10000	0
2011	13	0,99997	0,00005	0,00005	10000	0	10000	0
2011	14	0,99977	0,00036	0,00036	9999	4	9998	1
2011	15	0,99894	0,00147	0,00147	9996	15	9988	4
2011	16	0,99603	0,00445	0,00444	9981	44	9959	19
2011	17	0,99060	0,00808	0,00805	9937	80	9897	63
2011	18	0,98073	0,01201	0,01194	9857	118	9798	143
2011	19	0,96306	0,02014	0,01994	9739	194	9642	261
2011	20	0,93966	0,02364	0,02336	9545	223	9433	455
2011	21	0,91317	0,02891	0,02850	9322	266	9189	678
2011	22	0,88023	0,03267	0,03214	9056	291	8911	944
2011	23	0,84501	0,03771	0,03701	8765	324	8603	1235
2011	24	0,80889	0,04638	0,04533	8441	383	8249	1559
2011	25	0,76510	0,05630	0,05476	8058	441	7837	1942
.....								
2011	48	0,06309	0,00024	0,00024	1969	0	1969	8031
2011	49	0,06329	0,00025	0,00025	1969	0	1969	8031
2011	50	0,06264	0,00000	0,00000	1968	0	1968	8032
2011	51	0,06323	0,00026	0,00026	1968	1	1968	8032
2011	52	0,06516	0,00049	0,00049	1968	1	1967	8032
2011	53	0,06260	0,00000	0,00000	1967	0	1967	8033
2011	54	0,05822	0,00000	0,00000	1967	0	1967	8033
2011	55+	0,05698	0,00023	0,00023	1967	0	1967	8033

Jitka Rychtaříková

55

55

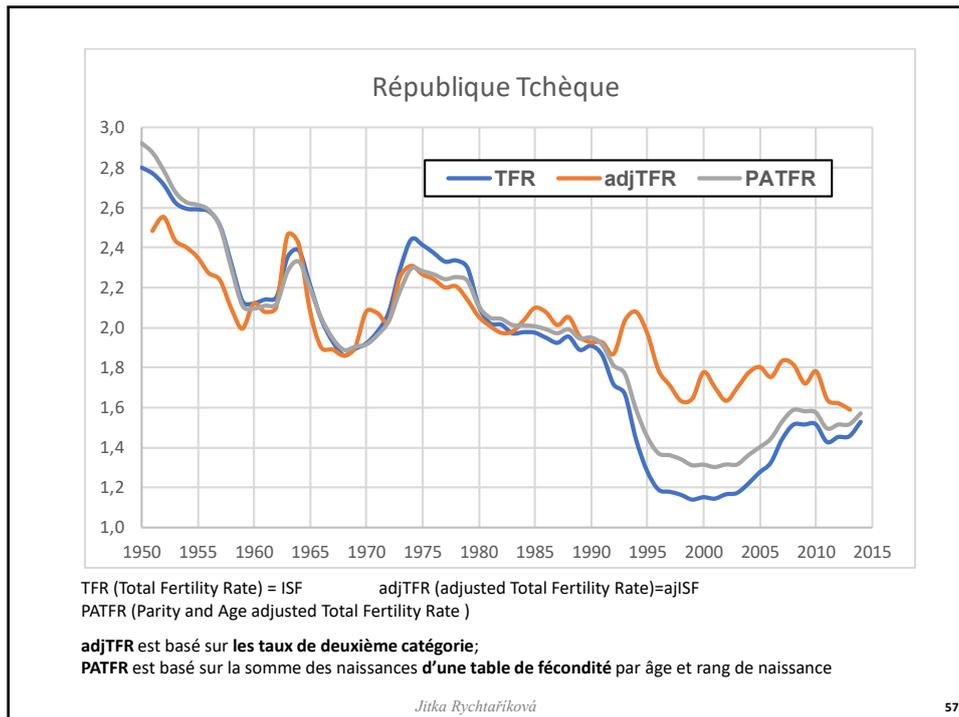
**Table de fécondité de deuxième rang: République Tchèque, HFD**

Year	x	w1x	m2x	q2x	l1x	b2x	L1x	Sb2x
2011	-12	0,00000	.	.	0	0	0	0
2011	13	0,00003	.	.	0	0	0	0
2011	14	0,00023	0,00000	0,00000	1	0	2	0
2011	15	0,00106	0,00000	0,00000	4	0	12	0
2011	16	0,00387	0,03699	0,03632	19	2	41	0
2011	17	0,00884	0,11622	0,10984	62	11	98	2
2011	18	0,01746	0,09841	0,09379	130	18	183	13
2011	19	0,03237	0,10787	0,10235	230	34	315	31
2011	20	0,05088	0,11990	0,11312	390	58	480	65
2011	21	0,07122	0,09633	0,09191	556	64	663	122
2011	22	0,09522	0,09766	0,09311	757	85	868	186
2011	23	0,11799	0,10392	0,09878	964	112	1078	271
2011	24	0,14018	0,11109	0,10524	1176	145	1306	383
2011	25	0,16637	0,10879	0,10318	1414	170	1561	528
.....								
2011	48	0,17014	0,00018	0,00018	2641	0	2641	5389
2011	49	0,16032	0,00010	0,00010	2641	0	2641	5390
2011	50	0,15493	0,00000	0,00000	2642	0	2642	5390
2011	51	0,14945	0,00000	0,00000	2642	0	2642	5390
2011	52	0,14226	0,00000	0,00000	2642	0	2643	5390
2011	53	0,13959	0,00000	0,00000	2643	0	2643	5390
2011	54	0,14037	0,00000	0,00000	2643	0	2643	5390
2011	55+	0,14103	0,00000	0,00000	2643	0	2643	5390

Jitka Rychtaříková

56

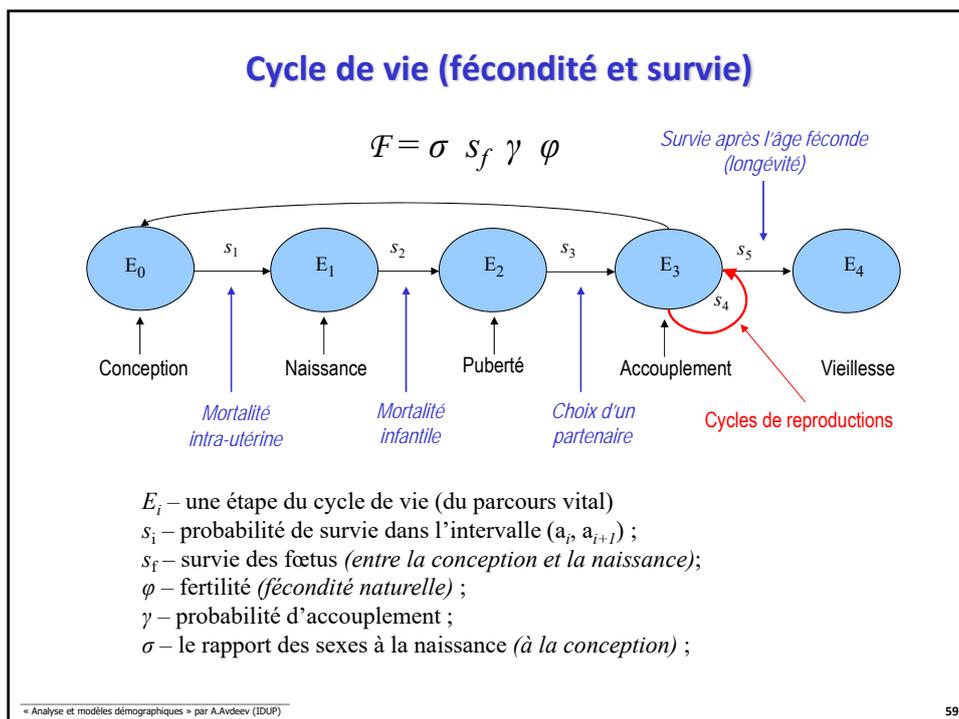
56



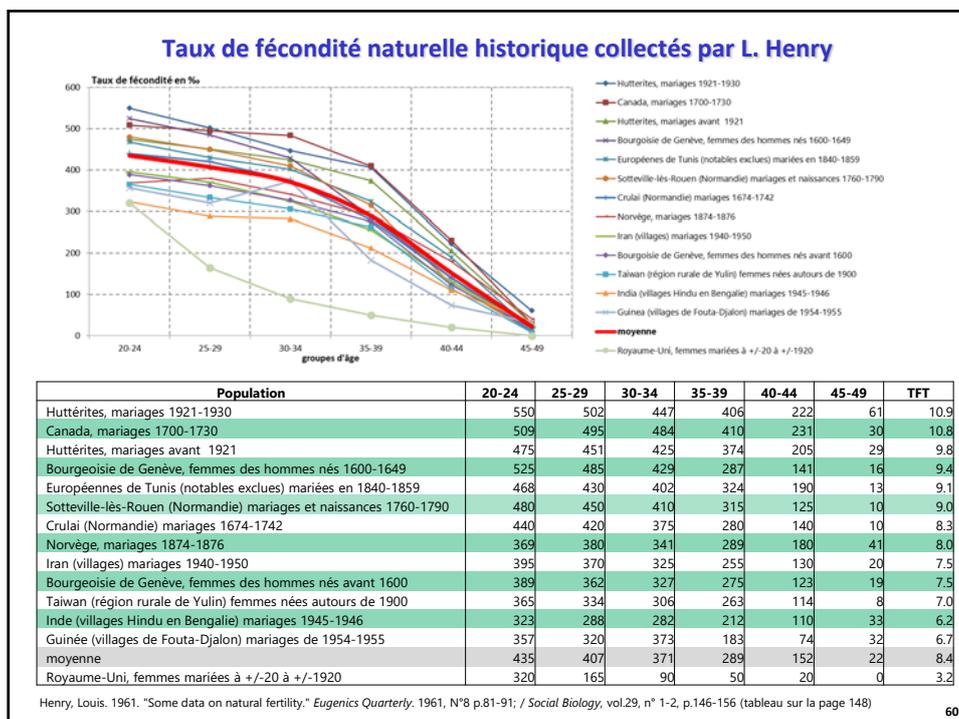
57

## Approches et éléments auxiliaires de l'analyse de fécondité

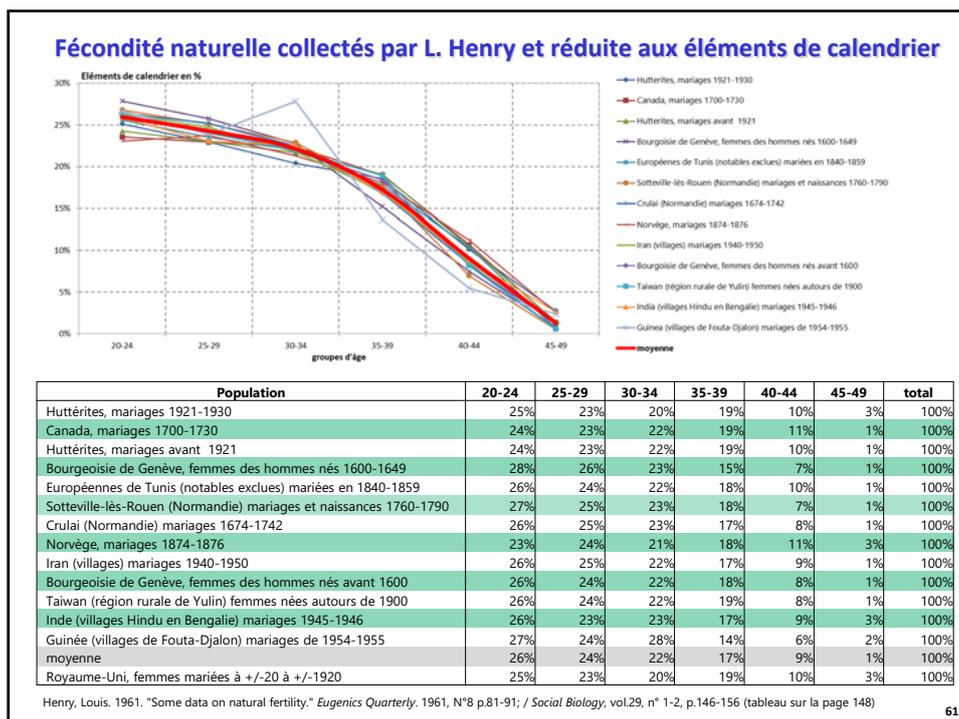
58



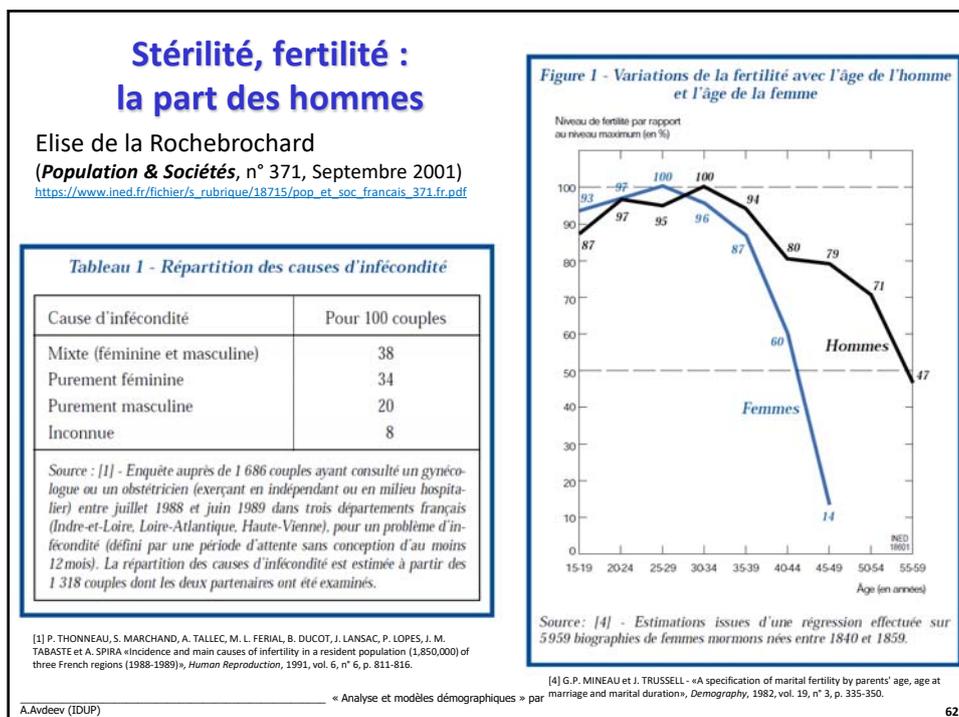
59



60



61



62

## Analyse de fécondité basée sur la durée de l'état autre que l'âge des femmes :

Les principes d'analyse ne changent pas si on remplace l'âge des femmes comme variable explicative par une autre mesure de la durée.

Ainsi, l'analyse de la fécondité peut se baser sur *la durée du mariage*. Dans ce cas on ne considère pas la fécondité comme une fonction de l'âge des femmes, mais comme en fonction de l'âge des couples (familles) et on parle de la fécondité des promotions de mariages. De même façon on peut étudier la durée de temps écoulé depuis *la migration* ou de *la naissance précédente* etc.

### Problème d'interaction:

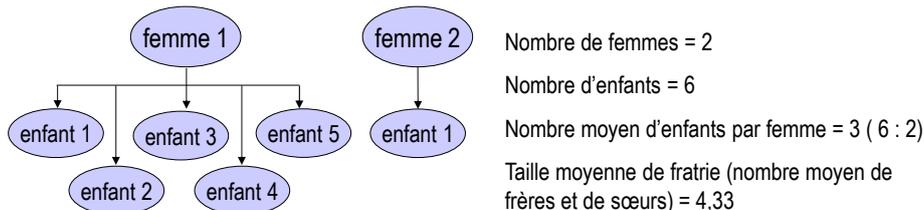
Même si on change notre variable explicative dans l'analyse de la fécondité, l'âge des femmes y reste indirectement présent : par exemple, la durée des mariages est liée à l'âge au mariage.

En outre,

- dans une promotion des mariages il y a toujours une proportion des unions où l'âge des femmes dépasse les limites de la période de procréation (15-49 ans)
- les mariages tardifs pourraient être moins féconds que ceux conclus aux âges plus jeunes
- la durée d'études, le niveau d'éducation peuvent jouer le rôle des phénomènes perturbateurs

63

## Fécondité des femmes et entourage familial des enfants



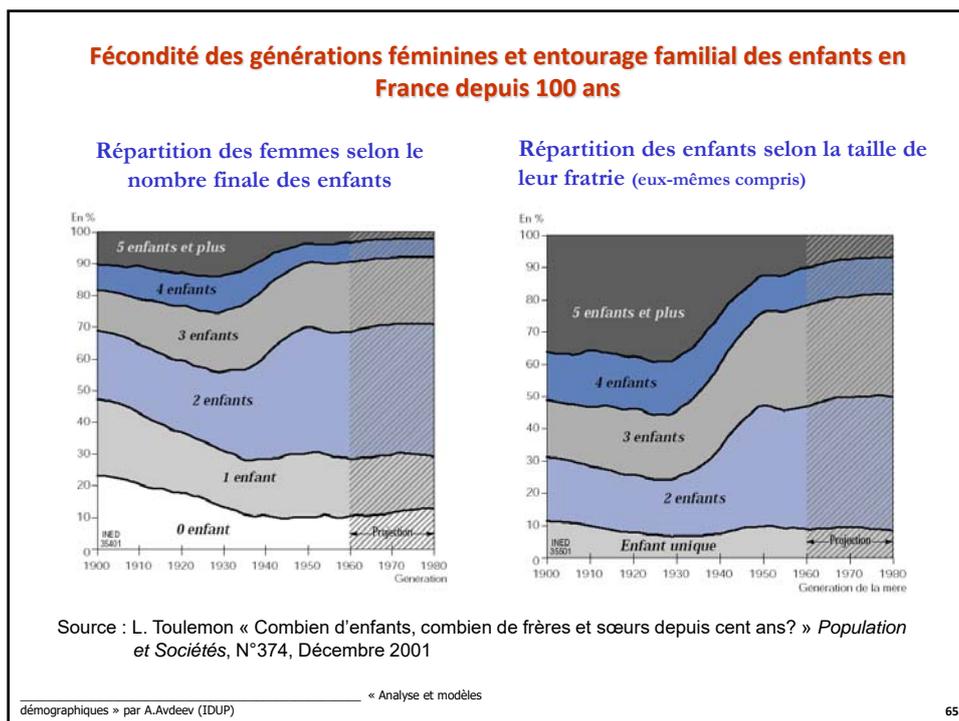
- 50% de femmes ont 5 enfants et 50% de femmes ont 1 enfant;
- Nombre\* de frères et sœurs dans la famille de 5 enfants = 25 (5 x 5) et dans la famille d'un enfant il n'y en a qu'un (1 x 1)  $(0,5 \cdot 25 + 0,5 \cdot 1) / (0,5 \cdot 5 + 0,5 \cdot 1) = 4,33$

$$\bar{T}_f = \frac{\sum_{n=1}^m p_n \cdot (n \cdot n)}{\sum_{n=1}^m p_n \cdot n} = \frac{\sum_{n=1}^m p_n \cdot n^2}{\sum_{n=1}^m p_n \cdot n}$$

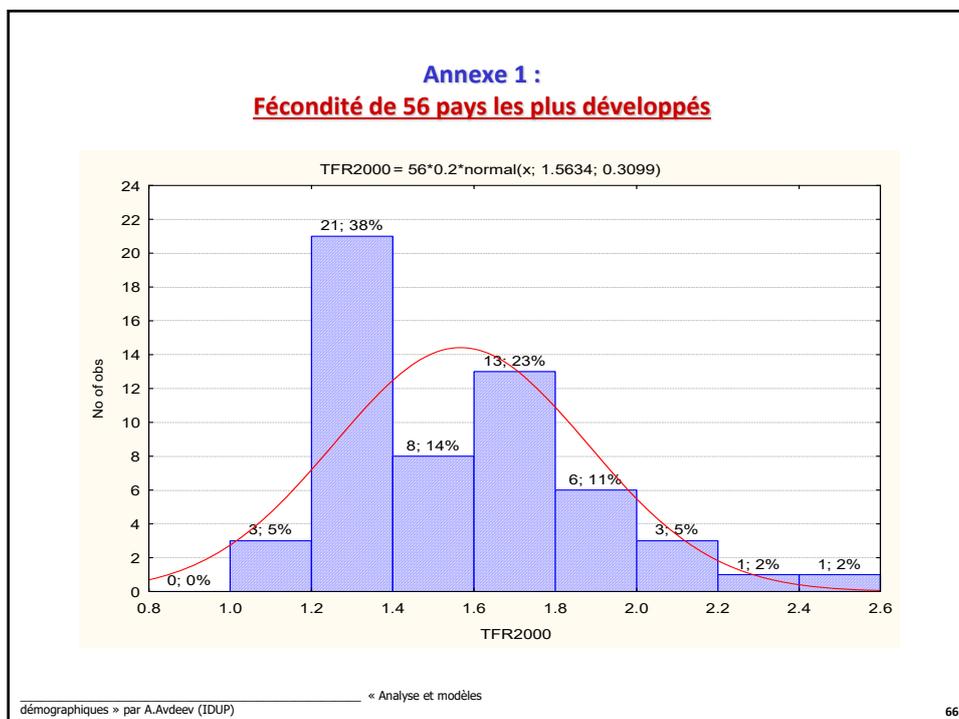
$\bar{T}_f$  – taille moyenne de la fratrie  
 $p_n$  – proportion des femmes à parité  $n$   
 $n$  – parité

ou → 
$$\bar{T}_f = \bar{n} + \frac{\sigma_n^2}{\bar{n}}$$
  $\sigma_f^2$  – la variance de parité

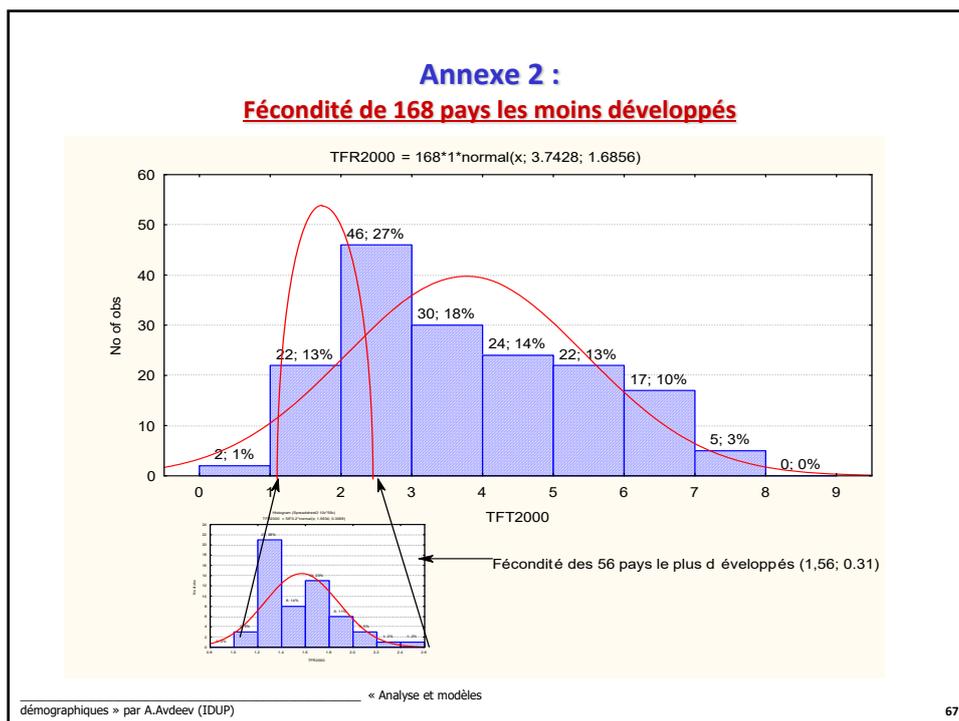
64



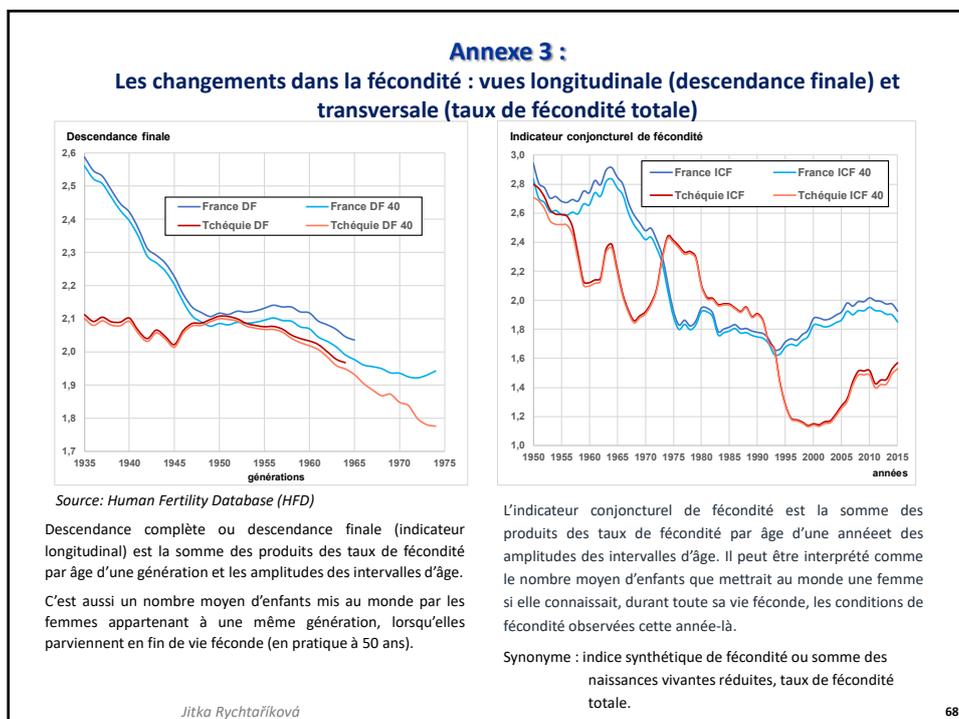
65



66



67



68