Chronique de l'A.E.D. (Association des experts-démographes et diplomés de démographie générale). (1971). *Population (French Edition)*, 26(6), 1125–1149. https://doi.org/10.2307/1530188

CHRONIQUE DE L'A. E. D.

ASSOCIATION DES EXPERTS-DÉMOGRAPHES ET DIPLOMÉS DE DÉMOGRAPHIE GÉNÉRALE

L'A.E.D. [1] *regroupe les diplômés de l'Institut de démographie de Paris et publie périodiquement une chronique dans la revue* Population.

LA CONSTRUCTION DE TABLES DE MORTALITÉ ABRÉGÉES : COMPARAISON DE TROIS MÉTHODES USUELLES

Yves PÉRON, *expert démographe, professeur au département de démographie de l'université de Montréal, compare les résultats des trois principales méthodes de conversion de taux en quotients.*

La construction de tables de mortalité abrégées repose, on le sait, sur l'utilisation de formules de conversion de taux en quotients et les méthodes ne diffèrent, quant au fond, que par le choix initial de cette formule. Dans l'ensemble des méthodes établies par les statisticiens, les actuaires ou les démographes, nous avons retenu, à des fins de comparaison, les trois dont l'emploi aparaît le plus fréquent.

Les trois méthodes usuelles.

Dans une population stationnaire, on établit sans difficultés, pour les intervalles d'âges au sein desquels la courbe de survie est linéaire, la relation suivante [2] :

$$(\mathrm{I}_a) \qquad {}_aq_x = \frac{2a \,.\, {}_am_x}{2 + a \,.\, {}_am_x}$$

Nous appelons, faute de mieux, méthode « actuarielle » la construction de tables à partir de cette formule, même lorsque les conditions restrictives de son emploi (linéarité de la courbe de survie dans chaque intervalle d'âges considéré, régularité des effectifs au sein d'un même groupe de générations successives) ne sont pas remplies.

---

(1) Loi de 1901; siège social, 2, rue Cujas, Paris (V^e).

(2) Nous adopterons les notations suivantes :
${}_am_x$ = taux de mortalité des personnes d'âge x à $x + a - 1$ (en années révolues);
${}_aq_x$ = quotient de mortalité de l'anniversaire x à l'anniversaire $x + a$;
${}_ap_x$ = taux de survie de l'anniversaire x à l'anniversaire $x + a$ (on a ${}_ap_x = 1 - {}_aq_x$).

La deuxième méthode, due à Reed et Merrell [1], a une base plus empirique. C'est en confrontant, pour les États-Unis, en 1910, 1920 et 1930, les taux calculés aux *quotients déduits des tables complètes* que les auteurs ont abouti à l'expression :

$$\text{(II}a\text{)} \qquad {}_aq_x = 1 - \exp.\ [-a\,.\,{}_am_x - 0{,}008\,a^3\,.\,({}_am_x)^2]$$

Malgré sa limitation dans le temps et l'espace, cette formule est largement utilisée, Reed et Merrell ayant eu l'heureuse idée de construire des tables de conversion, pour diverses valeurs du taux de mortalité et de l'intervalle d'âges.

La croissance exponentielle des taux de mortalité dans la seconde moitié de la vie a conduit Greville [2] à proposer la relation suivante :

$$\text{(III}\,a\text{)} \qquad {}_aq_x = \frac{{}_am_x}{\frac{1}{a} + {}_am_x\left[\frac{1}{2} + \frac{a}{12}\,({}_am_x - \ln c)\right]}$$

dans laquelle c est une constante, obtenue en ajustant une fonction de Gompertz à la série des taux de mortalité des personnes de plus de 30 ans. L'extension de cette relation aux jeunes âges, peu justifiable en théorie, s'avère sans conséquences pratiques fâcheuses.

La comparaison des trois méthodes ne peut se faire facilement, en utilisant les formules précédentes; elle devient, au contraire, plus facile, lorsque l'on utilise les relations entre taux de mortalité et taux de survie.

Relations entre taux de mortalité et taux de survie.

Commençons par établir cette relation pour la méthode « actuarielle ». De la relation (Ia) on tire :

$${}_ap_x = 1 - {}_aq_x = \frac{2 - a\,.\,{}_am_x}{2 + a\,.\,{}_amx}$$

ou encore :

$$\ln {}_ap_x = \ln(2 - a\,.\,{}_am_x) - \ln(2 + a\,.\,{}_am_x)$$

En utilisant le développement en série de Mac-Laurin, cette équation devient :

$$\ln {}_ap_x = -a\,.\,{}_am_x - \frac{1}{12}\,a^3\,.\,{}_am_x^3 - \frac{1}{80}\,a^5\,{}_am_x^5 - \dots$$

Dans le cas le plus fréquent où l'intervalle d'âges est de 5 ans, on peut montrer que l'erreur commise sur le quotient de mortalité demeure inférieure à 1 %, si l'on utilise les approximations que voici :

$$\text{pour } {}_am_x < 0{,}080 \ :\ \ln {}_5p_x = -5\,.\,{}_5m_x$$

$$\text{pour } 0{,}080 \leqslant {}_am_x < 0{,}200 \ :\ \ln {}_ap_x = -5\,.\,{}_5m_x - \frac{1}{12}\,5^3\,.\,{}_5m_x^3$$

---

(1) L. J. Reed et M. Merrell : « A short method for constructing an abridged life table » dans *The American Journal of Hygiene*, vol. 30, n° 2, sept. 1939.

(2) T. N. E. Greville : « Short methods of constructing abridged life tables », dans *The Record of the American Institute of Actuaries,* vol. 32, part. 1, n° 65, juin 1943.

Comme des taux supérieurs à 200 °/₀₀ ne se rencontrent de nos jours qu'aux âges très élevés où, de toute manière, l'inexactitude des statistiques rend nécessaire l'adoption d'un modèle raisonnable d'évolution de la mortalité, nous pouvons retenir, comme expression générale du logarithme népérien du taux de survie, dans la méthode actuarielle :

$$\text{(Ib)} \qquad \ln {}_ap_x = -a \, . \, {}_am_x - \frac{1}{12} a^3 \, . \, {}_am_x^3$$

Dans les articles cités précédemment, on trouve des expressions identiques pour les deux autres méthodes, soit :

pour celle de Reed et Merrell :

$$\text{(II } b\text{)} \qquad \ln {}_ap_x = -a \, . \, {}_am_x - 0{,}008 \, a^3 \, {}_am_x^2$$

pour celle de Greville :

$$\text{(III } b\text{)} \qquad \ln {}_ap_x = -a \, . \, {}_am_x - \frac{\ln c}{12} a^3 \, {}_am_x^2$$

Comparaison des trois méthodes.

Portons d'abord la comparaison sur les taux de survie des deux premières méthodes (notés par la suite ${}_aA_x$ pour la méthode « actuarielle » et ${}_aR_x$ pour celle de Reed et Merrell). Comme $\frac{1}{12}$ est voisin de 0,008 × 10, on peut écrire d'après I b et II b que :

$$\text{(IV)} \qquad \ln \frac{{}_aR_x}{{}_aA_x} = \ln {}_aR_x - \ln {}_aA_x = -0{,}008 \, a^3 \, . \, {}_am_x^2 \, (1 - 10 \, {}_am_x)$$

Ce logarithme s'annule pour un taux de mortalité de 100 °/₀₀, est négatif pour les valeurs inférieures et positif pour les valeurs supérieures; il en résulte que la méthode actuarielle donne des taux de survie plus élevés aux âges où le taux de mortalité est inférieur à 100 °/₀₀ et des taux de survie moins élevés dans le cas contraire.

Les relations entre les taux de survie ${}_aG_x$ de la méthode de Greville et les précédents se présentent ainsi :

$$\text{(V)} \qquad \ln \frac{{}_aR_x}{{}_aG_x} = -a^3 \, . \, {}_am_x^2 \left(0{,}008 - \frac{\ln c}{12}\right)$$

$$\text{(VI)} \qquad \ln \frac{{}_aG_x}{{}_aA_x} = -a^3 \, . \, {}_am_x^2 \left(\frac{\ln c}{12} - 0{,}008 \times 10 \, {}_am_x\right)$$

Dans la plupart des cas, $\frac{\ln c}{12}$ est inférieur à 0,008; un raisonnement analogue au précédent conduit alors *le plus souvent* aux conclusions ci-après :

a. La méthode de Greville donne des taux de survie plus élevés que ceux obtenus par la méthode de Reed et Merrell;

b. Elle donne également des taux de survie supérieurs à ceux de la méthode « actuarielle », lorsque le taux de mortalité dépasse 100 °/₀₀, mais des taux de survie inférieurs dans le cas contraire.

La hiérarchie des quotients de mortalité se déduit tout naturellement de cette hiérarchie des taux de survie et le tout peut être résumé dans le tableau suivant :

Taux de mortalité	Hiérarchie des taux de survie (par valeurs décroissantes)	Hiérarchie des quotients de mortalité (par valeurs décroissantes)
${}_a m_x < 0{,}100$	1. Méthode « actuarielle ». 2. Méthode de Greville. 3. Méthode de Reed et Merrell.	1. Méthode de Reed et Merrell. 2. Méthode de Greville. 3. Méthode « actuarielle ».
${}_a m_x = 0{,}100$	Égalité	Égalité
${}_a m_x > 0{,}100$	1. Méthode de Greville. 2. Méthode de Reed et Merrell. 3. Méthode « actuarielle ».	1. Méthode « actuarielle » 2. Méthode de Reed et Merrell. 3. Méthode de Greville.

Exemple et conclusions.

Nous reprenons ici l'exemple, désormais classique, traité par Reed et Merrell, ainsi que par Greville : la mortalité des hommes blancs du Connecticut au cours des années 1929-1931; notre seul travail a consisté à calculer une série de quotients selon la méthode actuarielle (cf. tableau I, ci-contre).

Les résultats confirment amplement la hiérarchie « attendue » des quotients aux deux niveaux séparés par le seuil d'un taux de mortalité de 100 $^0/_{00}$. Le seul écart notable est l'interversion des rangs des méthodes de Greville et de Reed et Merrell à 85 et surtout à 90 ans; la raison en est que pour des taux très élevés, les formules III *a* et III *b* ne sont pas équivalentes; la formule de calcul III *a* donne, dans ce cas, des quotients plus élevés que la formule III *b* (ainsi pour un taux de mortalité de 300 pour $^0/_{00}$ on a respectivement 0,7973 et 0,7949) et ceci est suffisant pour renverser la hiérarchie « attendue ».

Pour choisir la méthode, comparons les valeurs obtenues par chacune à celles de la *table complète,* construite année d'âge par année d'âge. Ces valeurs exactes figurent dans la dernière colonne du tableau et la comparaison suggérée montre que *les quotients les plus proches des quotients exacts sont le plus souvent, jusqu'à 80 ans, ceux de la méthode actuarielle.* A partir de cet âge, au contraire, l'avantage est aux deux autres méthodes; on peut se demander toutefois si la table complète, dans laquelle l'espérance de vie à 80 ans est de 5,30 ans constitue bien une norme acceptable.

Intervalle d'âges	Décès annuels	Effectifs de la population station-naire	100 000 ${}_5m_x$	10 000 ${}_5q_x$		
				Méthode « actua-rielle »	Méthode de Reed et Merrell	Valeurs exactes
85-90.............	72 664	291 560	24 922	7 678	6 984	7 266
90-95.............	23 226	64 384	36 074	9 484	8 554	8 496

TABLEAU I. — QUOTIENTS DE MORTALITÉ DES HOMMES BLANCS DU CONNECTICUT 1929-1931

Intervalle d'âges	Taux de mortalité 100 000 $_a m_x$	Quotient de mortalité 100 000 $_a q_x$			
		Méthode « actuarielle »	Méthode Reed et Merrell	Méthode Greville	Table complète
2-5 ans	340	1 014	1 015	1 014	999
5-10 ans	177	881	881	881	852
10-15 ans	135	672	673	672	683
15-20 ans	220	1 095	1 094	1 096	1 079
20-25 ans	303	1 504	1 504	1 504	1 465
25-30 ans	321	1 593	1 593	1 594	1 595
30-35 ans	365	1 810	1 810	1 811	1 821
35-40 ans	496	2 450	2 452	2 452	2 463
40-45 ans	736	3 613	3 618	3 617	3 587
45-50 ans	1 067	5 195	5 206	5 204	5 301
50-55 ans	1 662	7 978	7 999	7 997	7 983
55-60 ans	2 375	11 209	11 247	11 243	11 103
60-65 ans	3 153	14 610	14 670	14 664	14 979
65-70 ans	4 873	21 721	21 809	21 802	21 634
70-75 ans	7 086	30 100	30 185	30 172	30 140
75-80 ans	10 261	40 829	40 757	40 742	40 955
80-85 ans	15 601	56 117	55 264	55 264	55 152
85-90 ans	22 970	72 935	69 918	69 984	69 596
90-95 ans	30 729	86 893	80 424	80 555	82 235

N. B. — Les résultats pour les intervalles 0-1 et 1-2 ans ne sont pas reproduits car leur détermination est, dans ce cas-ci relativement indépendante de la méthode utilisée.

Dans le doute, nous avons préféré utiliser les données de P. Vincent [1], les plus sûres que nous connaissions sur la mortalité des grands vieillards. A partir du tableau IV de son article, nous avons calculé les taux de mortalité de la population stationnaire associée à sa table, puis déterminé les quotients à l'aide des formules I *a* et I *b* (tableau page précédente).

D'après ces résultats, méthode « actuarielle » et méthode de Reed et Merrell (et a fortiori la méthode de Greville qui donne des quotients sensiblement égaux) produisent, entre 85 et 90 ans, des résultats à peu près également distants de la valeur exacte; ce n'est qu'après 90 ans que la méthode de Reed et Merrell prend un net avantage.

Ainsi, *jusqu'à un âge très avancé, la méthode « actuarielle », qui est d'ailleurs la plus simple et la plus rapide, est celle qui donne les meilleurs résultats.* Aux âges où elle s'écarte beaucoup de la réalité, le recours aux autres méthodes s'avère illusoire, parce que leurs résultats sont également défectueux ou parce que l'insuf-

(1) Paul VINCENT : « La mortalité des vieillards », *Population*, 1951, p. 181-203.

fisance des statistiques ne permet pas d'accorder grand crédit aux taux calculés : aussi, à ces âges, le problème n'est plus de choisir telle méthode plutôt que telle autre mais bien de substituer aux données imparfaites un modèle raisonnable (type modèle Vincent) de l'évolution de la mortalité selon l'âge.

Yves PÉRON.