

TD 8-2 Exercice 2

En 1991-1992, l'enquête « Démographie et santé » (*Demographic and Health Survey*) a été réalisée en Tanzanie auprès de près de 9000 femmes âgées de 15 à 50 ans (15-49 ans révolus). Au cours de cette enquête les femmes ont répondu aux questions sur les dates de naissance de tous leurs enfants biologiques. Le tableau ci-dessous représente la distribution des naissances de deuxième enfant selon l'année de leur naissance ainsi que selon l'année de naissance de leurs frères et sœurs aînés (les premières naissances). Calculez à partir de ces données la probabilité de naissance de deuxième enfant (probabilité d'agrandissement de la famille a_1 / parity progression ratio 1-2) pour les cohortes féminines définies par l'année de naissance du premier enfant et pour les cohortes fictives des périodes du 1980 à 1990. Calculez le même indicateur pour les années ultérieures et commentez-les.

Répartition des femmes selon l'année de naissance de leur premier et second enfant (EDS, Tanzanie, 1991-1992)

Année de naissance du 1 ^{er} enfant	Nombre de femmes ayant 1 ^{er} enfant	année de naissance du 2d enfant																					
		1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	
1970	99	1	9	38	24	11	6	2	0	0	1	1											
1971	119		0	9	47	37	7	6	3	1	0	0	0										
1972	121			0	17	51	26	9	4	2	2	0	0	4									
1973	123				0	11	55	30	5	7	1	1	0	1	1								
1974	159					2	12	68	40	10	7	2	3	1	1	2							
1975	110						0	10	40	30	6	6	1	2	1	1	0						
1976	161							0	13	66	42	12	10	6	2	0	2	2					
1977	137								3	12	64	29	16	6	1	2	0	0	1				
1978	149									0	7	55	54	14	7	1	2	2	1	0			
1979	162										1	17	61	40	19	8	2	3	3	1	1		
1980	180											4	5	67	45	23	8	4	2	0	2	0	
1981	207												1	12	70	62	23	10	8	3	5	0	
1982	185													2	11	62	51	22	8	4	1	3	
1983	225														2	13	88	59	19	5	9	8	
1984	239															0	25	76	68	28	10	6	
1985	274																0	15	102	80	21	19	
1986	271																	1	17	94	79	33	
1987	314																		3	17	101	91	
1988	342																			3	24	108	
1989	358																				3	30	
1990	367																					3	

Solution

Pour chaque cohorte réelle définie par l'année de naissance du premier enfant on peut calculer la probabilité de naissance du deuxième enfant durant chaque année écoulée après la première naissance. Ensuite, il est possible de calculer la probabilité d'avoir un deuxième enfant avant 1990 comme une combinaison (produit) ses compléments à un.

Soit ${}^{xx}q_{yy}$ la probabilité pour une femme qui a eu le premier enfant durant l'année XX (par exemple, en 1970) d'accoucher son deuxième enfant durant année YY (par exemple, en 1972). Cette probabilité n'est que la proportion des femmes qui accouchent le deuxième enfant durant année YY (par exemple, en 1972) parmi celles qui ont eu la naissance du premier enfant durant l'année XX (par exemple, en 1970) et n'ont pas encore eu la deuxième naissance dans l'intervalle entre YY et XX.

$${}^{xx}q_{yy}^2 = \frac{{}^{xx}N_{yy}^2}{N_{xx}^1 - \sum_{aa=xx}^{yy-1} {}^{xx}N_{aa}^2} \quad \text{où}$$

- ${}^{xx}q_{yy}^2$ – la probabilité d'avoir le deuxième enfant en 19yy pour celle qui a eu le premier en 19xx
- ${}^{xx}N_{yy}^2$ – le nombre de deuxièmes naissances dans l'année 19yy chez les femmes qui ont eu la première naissance en 19xx
- N_{xx}^1 – le nombre des premières naissances dans l'année 19xx

Par exemple pour les femmes ayant eu le premier enfant en 1970 la probabilité d'avoir le deuxième en 1972 sera égale à

$${}^{1970}q_{1972}^2 = \frac{38}{99 - (9 + 1)} = \frac{38}{89} = 0,427 \quad \text{et la probabilité de ne pas l'avoir } {}^{1970}p_{1972}^2 = 1 - 0,427 = 0,573 \text{ (voir tab.2)}$$

La proportion des femmes n'ayant pas deuxième naissance avant 19yy (${}^{xx}p_{yy}$) sera égale :

$${}^{xx}p_{yy} = \prod_{aa=xx}^{yy} (1 - {}^{xx}q_{aa}^2) \quad \text{– ne pas avoir un enfant cette année sous la condition de ne pas en avoir l'année précédente, l'année d'avant etc.}$$

La probabilité d'avoir le deuxième enfant vers l'an 19yy \rightarrow la probabilité d'agrandissement de la famille avec le deuxième enfant \rightarrow ${}^{xx}a_1(yy)$ sera égale à

$${}^{xx}a_1(yy) = 1 - {}^{xx}p_{yy} = 1 - \prod_{aa=xx}^{yy} (1 - {}^{xx}q_{aa}^2)$$

On peut vérifier que les valeurs obtenues de cette manière sont bonnes, sachant que dans les cohortes réelles la probabilité d'agrandissement de la famille de rang i est égale à la proportion de femmes ayant au moins $i+1$ enfants parmi celles qui en ont au moins i .

$${}^{xx}a_1(yy) = \frac{\sum_{aa=xx}^{yy} {}^{xx}N_{aa}^2}{N_{xx}^1} \quad \rightarrow \text{pour la cohorte 1971} \rightarrow \frac{9 + 47 + 37 + 7 + 6 + 3 + 1}{119} = \frac{110}{119} = 0,924$$

(voir tab.1)

Ce résumé est fait ligne par ligne pour les cohortes réelles. Pour les cohortes synthétiques (fictives) on peut faire le même résumé par les colonnes (voir la dernière ligne dans le tableau 2).

$$a_1^{yy} = 1 - \prod_{xx=1970}^{1990} (1 - {}^{xx}q_{yy}^2) \quad \text{– une « vraie » probabilité synthétique (transversale) d'agrandissement de la famille de deuxième enfant durant l'année 19yy.}$$

En fait, pour chaque ligne (cohorte) du tableau des données, on a construit une table de fécondité de deuxième rang.

Prenons, comme exemple, la deuxième cohorte (première naissance en 1971), pour laquelle la table de fécondité sera comme celle-ci : (*attention ! N'oubliez pas l'hypothèse sur la durée moyenne des intervalles, on suppose qu'ils sont égaux à la moitié de l'amplitude*)

Hypothèse	Données observées et l'entrée dans la table				Table				
Durée moyenne (âge) d'intervalle entre 1 ^e et 2 ^e naissances X	Année de deuxième naissance	Population P _x	Nombre de 2 ^e naissance D _x	Entrée : quotient Q _x	Survie S _x (*)	2 ^e naissance d _x	nL _x	T _x	e _x
0.9	1971	119	0	0	1000	0	1000	3790	3.79
1.5	1972	119	9	0.076	924	76	962	2790	2.79
2.5	1973	110	47	0.427	529	395	727	1828	1.98
3.5	1974	63	37	0.587	218	311	374	1101	2.08
4.5	1975	26	7	0.269	160	59	189	727	3.33
5.5	1976	19	6	0.316	109	50	134	538	3.37
6.5	1977	13	3	0.231	84	25	97	403	3.692
7.5	1978	10	1	0.1	76	8	80	307	3.65
8.5	1979	9	0	0	76	0	76	227	3
9.5	1980	9	0	0	76	0	76	151	2
10.5	1981	9	0	0	76	0	76	76	1

Somme de naissance de table pour 1000= 924

(*) l'effectif initial de la cohorte au 1 janvier 1972 (il n'y avait pas de deuxième naissance en 1971) et les événements sont dans les parallélogrammes de type génération-période : on étudie la probabilité d'avoir un enfant entre le 1 janvier d'une année et le 1^{er} janvier de l'année suivante)

Par conséquent, on peut calculer la durée moyenne de l'intervalle entre 1^e et 2^e naissances et les autres caractéristiques d'une table démographique. Pour la promotion de premières naissances 1971, l'intervalle moyen calculé comme la somme de produits des durées (x) est estimé de 3,2 ans sous l'hypothèse que les naissances ont lieu toujours au milieu de chaque année. En revanche, e₀ – est la durée moyenne de vie sans 2^e enfant de toutes les femmes de cette cohorte (celles qui ont eu le 1^{er} enfant en 1977). Pour transformer e₀ en intervalle entre les naissances il faut procéder comme dans le cas du SMAM : soustraire du nombre total d'années vécues (3790) le nombre d'année vécues par celles qui n'ont pas eu le 2^e enfant (76 x 11=832) et diviser le résultat par la proportion de celles qui l'ont eu (0,94), on obtient ainsi 3,2 d'année. La probabilité d'agrandissement de la famille avec 1 enfant, a₁=0.924. On ne peut pas cependant calculer la descendance de rang 2 puisque dans notre cas toutes les femmes de cohorte ont eu premier enfant.

On peut faire les mêmes opérations pour une synthèse transversale et calculer l'intervalle « transversal » sous la même hypothèse. Prenons comme exemple l'année 1990, la somme de deuxièmes naissances de table est égale à 939 pour 1000 (le même résultat qu'on a obtenu par la synthèse de « vraies » probabilités) et la durée moyenne de vie sans 2^e naissances = 3.95, la probabilité d'agrandissement a₁=0.936 et l'intervalle moyen entre les naissances =3.47 d'année pour cette période.

Durée moyenne (âge) d'intervalle entre 1 ^e et 2 ^e naissances (x)	Année de première naissance	Survie S _x	2 ^e naissance d _x	nL _x	T _x	E _x
0.9	1990	1000	8	995.9	3951	3.95
1.5	1989	992	84	949.9	2956	2.98
2.5	1988	908	311	752.4	2006	2.21
3.5	1987	597	281	456.0	1253	2.10
4.5	1986	315	130	250.3	797	2.53
5.5	1985	185	63	153.8	547	2.95
6.5	1984	122	23	110.9	393	3.21
7.5	1983	99	27	86.2	282	2.84
8.5	1982	73	9	68.4	196	2.69
9.5	1981	64	0	63.8	128	2.00
10.5	1980	64	0	63.8	64	1.00
Somme			936			

Feuille de calcul final (pour vérifier vos calculs)

Tab.1 Répartition des femmes selon l'année de naissance de leur premier et second enfant (EDS, Tanzanie, 1991-1992)

Année de naissance du 1er enfant	Nbr de femmes ayant 1er enfant	année de naissance du 2d enfant																			Probabilité finale de ne pas en avoir un		
		1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988		1989	1990
1970	99	1	9	38	24	11	6	2	0	0	1	1										0.9394	
1971	119		0	9	47	37	7	6	3	1	0	0	0									0.9244	
1972	121			0	17	51	26	9	4	2	2	0	0	4								0.9504	
1973	123				0	11	55	30	5	7	1	1	0	1	1							0.9106	
1974	159					2	12	68	40	10	7	2	3	1	1	2						0.9308	
1975	110						0	10	40	30	6	6	1	2	1	1	0					0.8818	
1976	161							0	13	66	42	12	10	6	2	0	2	2				0.9627	
1977	137								3	12	64	29	16	6	1	2	0	0	1			0.9781	
1978	149									0	7	55	54	14	7	1	2	2	1	0		0.9597	
1979	162										1	17	61	40	19	8	2	3	3	1	1	0.9630	
1980	180											4	5	67	45	23	8	4	2	0	2	0	0.8889
1981	207												1	12	70	62	23	10	8	3	5	0	0.9372
1982	185													2	11	62	51	22	8	4	1	3	0.8865
1983	225														2	13	88	59	19	5	9	8	0.9022
1984	239															0	25	76	68	28	10	6	0.8912
1985	274																0	15	102	80	21	19	0.8650
1986	271																	1	17	94	79	33	0.8266
1987	314																		3	17	101	91	0.6752
1988	342																			3	24	108	0.3947
1989	358																				3	30	0.0922
1990	367																					3	0.0082

Pour le femmes qui ont eu leurs premiers enfants en 1970 la probabilité de ne pas avoir un deuxième (probabilité finale) est égale à

$$(1+9+38+24+11+6+2+0+0+1+1) / 99 = (93 / 99) = 0.9394$$

Tab.2 Probabilité de n'est pas avoir deuxième enfant dans l'année en cours (colonne) selon l'année de naissance du premier (ligne)

Année de naissance du 1 ^{er} enfant	Nombre de femmes ayant 1 ^{er} enfant	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	cohort PPR 1-2
1970	99	0.99	0.91	0.57	0.53	0.59	0.63	0.8	1	1	0.88	0.86											0.9394
1971	119		1	0.92	0.57	0.41	0.73	0.68	0.77	0.9	1	1	1										0.9244
1972	121			1	0.86	0.51	0.51	0.67	0.78	0.86	0.83	1	1	0.6									0.9504
1973	123				1	0.91	0.51	0.47	0.81	0.68	0.93	0.93	1	0.92	0.92								0.9106
1974	159					0.99	0.92	0.53	0.48	0.73	0.74	0.9	0.83	0.93	0.93	0.85							0.9308
1975	110						1	0.91	0.6	0.5	0.8	0.75	0.94	0.88	0.93	0.93	1						0.8818
1976	161							1	0.92	0.55	0.49	0.7	0.64	0.67	0.83	1	0.8	0.75					0.9627
1977	137								0.98	0.91	0.48	0.5	0.45	0.54	0.86	0.67	1	1	0.75				0.9781
1978	149									1	0.95	0.61	0.38	0.58	0.63	0.92	0.82	0.78	0.86	1			0.9597
1979	162										0.99	0.89	0.58	0.52	0.56	0.67	0.88	0.79	0.73	0.88	0.86		0.963
1980	180											0.98	0.97	0.61	0.57	0.61	0.78	0.86	0.92	1	0.91	1	0.8889
1981	207												1	0.94	0.64	0.5	0.63	0.74	0.72	0.86	0.72	1	0.9372
1982	185													0.99	0.94	0.64	0.54	0.63	0.78	0.86	0.96	0.88	0.8865
1983	225														0.99	0.94	0.58	0.52	0.7	0.89	0.77	0.73	0.9022
1984	239															1	0.9	0.64	0.51	0.6	0.76	0.81	0.8912
1985	274																1	0.95	0.61	0.49	0.73	0.66	0.865
1986	271																	1	0.94	0.63	0.5	0.59	0.8266
1987	314																		0.99	0.95	0.66	0.53	0.6752
1988	342																			0.99	0.93	0.66	0.3947
1989	358																				0.99	0.92	0.0922
1990	367																					0.99	0.0082
period PPR 1-2		0.010	0.092	0.470	0.739	0.888	0.891	0.917	0.874	0.903	0.911	0.899	0.952	0.972	0.932	0.941	0.922	0.943	0.952	0.901	0.930	0.936	

Pour les femmes ayant eu le premier enfant en 1970 la probabilité d'avoir le deuxième en 1972 sera égale à ${}^{1970}q_{1972}^2 = \frac{38}{99 - (9 + 1)} = \frac{38}{89} = 0,427$ et la probabilité de ne pas l'avoir ${}^{1970}p_{1972}^2 = 1 - 0,427 = 0,573$

Pour les femmes qui ont eu leurs premiers enfants en 1970 la probabilité d'avoir un deuxième (probabilité finale) est égale à

$$1 - (0.99 \times 0.91 \times 0.57 \times 0.53 \times 0.59 \times 0.63 \times 0.8 \times 1 \times 1 \times 0.88 \times 0.86) = 0.9394$$