IDUP / février 21

Master 1 : Statistique descriptive (JF Léger)

5. Mesure des évolutions démographiques

Exercice 1 : Applications diverses

CORRIGE

Question 1

Complétez les tableaux 1 et 2 qui synthétisent les évolutions démographiques intercensitaires de la ville de Boulogne-sur-Mer (Pas-de-Calais) depuis 1968 (source : INSEE).

Tableau 1 : Evolution de la population résidant dans la commune de Boulogne-sur-Mer

Année	1968	1975	1982	1990	1999	2008
Population	49 288	**48 603**	47 653	43 678	44 865	43 757

Tableau 2 : Variation annuelle moyenne de la population en %

Période intercensitaire	1968 à 1975	1975 à 1982	1982 à 1990	1990 à 1999	1999 à 2008
Variation annuelle moyenne de la population en %(*)	-0,2	-0,2	-1,1	0,3	**-0,3**

(*) correspond au taux de solde annuel moyen sur la période

Corrigé

Le taux de solde annuel moyen sur une période donnée est le rapport entre la variation annuelle moyenne observée sur cette période et la population moyenne sur la même période. Il s'agit d'une mesure relative de l'évolution arithmétique de l'effectif d'une population.

$$TA\ en\ \% = 100 \times \frac{\frac{P_{t+N} - P_t}{N}}{\frac{P_{t+N} + P_t}{2}}$$

$$TA_{1999-2007}\ en\ \% = 100 \times \frac{\frac{P_{2008} - P_{1999}}{N}}{\frac{P_{2008} + P_{1999}}{2}} = 100 \times \frac{\frac{43\,757 - 44\,865}{9}}{\frac{43\,757 + 44\,865}{2}} = -0{,}3$$

On peut, à partir de TA et P_t en déduire P_{t+N} :

$$TA\ en\ \% = 100 \times \frac{\frac{P_{t+N} - P_t}{N}}{\frac{P_{t+N} + P_t}{2}}$$

$$(TA\ en\ \%) \times \frac{P_{t+N} + P_t}{2} = 100 \times \frac{P_{t+N} - P_t}{N}$$

$$\left[\frac{P_{t+N}}{2} \times (TA\ en\ \%)\right] + \left[\frac{P_t}{2} \times (TA\ en\ \%)\right] = \left[100 \times \frac{P_{t+N}}{N}\right] - \left[100 \times \frac{P_t}{N}\right]$$

$$\left[\frac{P_t}{2} \times (TA\ en\ \%)\right] + \left[100 \times \frac{P_t}{N}\right] = \left[100 \times \frac{P_{t+N}}{N}\right] - \left[\frac{P_{t+N}}{2} \times (TA\ en\ \%)\right]$$

$$P_t \times \left[\frac{(TA\ en\ \%)}{2} + \frac{100}{N}\right] = P_{t+N} \times \left[\frac{100}{N} - \frac{(TA\ en\ \%)}{2}\right]$$

$$P_{t+N} = P_t \times \frac{\left[\frac{100}{N} + \frac{(TA\ en\ \%)}{2}\right]}{\left[\frac{100}{N} - \frac{(TA\ en\ \%)}{2}\right]}$$

$$P_{75} = P_{68} \times \frac{\left[\frac{100}{7} + \frac{-0{,}2}{2}\right]}{\left[\frac{100}{7} - \frac{-0{,}2}{2}\right]} = 49\ 288 \times \frac{\left[\frac{100}{7} - \frac{0{,}2}{2}\right]}{\left[\frac{100}{7} + \frac{0{,}2}{2}\right]} = 48\ 603$$

Question 2

a) A partir des données du tableau 3, calculez le temps nécessaire au doublement de la population mondiale au cours des périodes suivantes :

- entre 1300 et 1400 ;
- entre 1900 et 2000.

b) Si le taux d'accroissement annuel moyen observé au XX^e siècle se maintient au XXI^e siècle, en quelle année la population mondiale comptera-t-elle 12 milliards de personnes ?

Tableau 3 : Population mondiale à différentes dates (en millions)

Date	-400	J.-C.	500	1000	1300	1400	1500	1700	1800	1900	2000
Population	152	250	205	257	429	374	458	682	968	1 613	6 062

Source : J.-N. Biraben, « L'évolution du nombre des hommes », *Population et sociétés*, n° 394, Ined, octobre 2003.

Corrigé

a) Entre 1300 et 1400, la population décroît. Le taux d'accroissement est nécessairement négatif et il n'est donc pas possible que la population double.

En revanche, entre 1900 et 2000 l'effectif de la population mondiale a été multiplié par 3,6. En 100 ans, la population a donc presque quadruplé. A ce rythme, il faut donc un peu plus de 50 ans pour que son effectif soit multiplié par deux. On peut préciser ce résultat.

Calcul du taux d'accroissement annuel moyen au cours du 20^e siècle :

$$P_{t+N} = P_t \times (1+r)^N$$

$$\frac{P_{t+N}}{P_t} = (1+r)^N$$

$$\sqrt[N]{\frac{P_{t+N}}{P_t}} = 1+r$$

$$r = \sqrt[N]{\frac{P_{t+N}}{P_t}} - 1$$

$$r = \sqrt[100]{\frac{P_{2000}}{P_{1900}}} - 1 = \sqrt[100]{\frac{6\,062}{1\,613}} - 1 = 0{,}013$$

a) Calcul du nombre d'années nécessaires au doublement de la population avec un taux d'accroissement relatif annuel moyen de 1,3 %

$$\ln\left(\frac{P_{t+N}}{P_t}\right) = \ln\left[(1+r)^N\right]$$

Comme on veut le temps nécessaire pour que $P_{t+N} = 2 \times P_t$:

$$\ln(2) = \ln\left[(1+r)^N\right]$$

$$\ln(2) = N \times \ln(1+r)$$

$$N = \frac{\ln(2)}{\ln(1+r)}$$

$$N = \frac{\ln(2)}{\ln(1+0{,}013)} = 53{,}7 \; ans$$

b) Au cours du XXe siècle, le taux d'accroissement annuel moyen a été de 1,3 %, ce qui correspond à un doublement de la population tous les 54 ans environ. A ce rythme, la population mondiale atteindrait donc 12 milliards de personnes en 2054.

Question 3

En 2011, les embauches de cadres ont progressé de 10 %

LEMONDE.FR | 15.02.12 | 06h51 • Mis à jour le 15.02.12 | 08h47

Les chiffres du chômage auraient tendance à masquer l'évènement. Mais 2011 fut une bonne année pour l'emploi des cadres en France selon l'Agence pour l'emploi des cadres (APEC). Les recrutements ont augmenté de 10% par rapport à 2010, ce qui correspond à la fourchette haute des prévisions de l'APEC un an plus tôt, selon l'étude sur la situation des cadres en 2011 et les prévisions 2012 publiée mercredi 15 février.

Si l'APEC pèche à nouveau par pessimisme cette année et si le scénario rose se réalise donc en 2012, ces recrutements augmenteront à nouveau de 8% en 2012 atteignant 195 000 recrutements. Ils baisseront en revanche de 10% dans le cas contraire.

A partir des informations publiées dans cet article du Monde, combien y-a-t-il eu de recrutements de cadres en France en 2010 ?

Corrigé

Il y aura 195 000 recrutements de cadres en 2012 si le nombre de recrutements augmente de 8 % par rapport à 2011 :

$$(a) : \hat{R}_{2012} = R_{2011} \times (1 + 0{,}08)$$

On apprend également que le nombre de recrutements en 2011 a augmenté de 10 % par rapport à 2010 :

$$(b) : R_{2011} = R_{2010} \times (1 + 0{,}10)$$

Pour calculer le nombre de recrutements en 2010, on remplace dans la relation (a) R_{2011} par son expression dans la relation (b) :

$$\hat{R}_{2012} = [R_{2010} \times (1 + 0{,}10)] \times (1 + 0{,}08)$$

$$\hat{R}_{2012} = R_{2010} \times (1 + 0{,}10) \times (1 + 0{,}08)$$

$$R_{2010} = \frac{\hat{R}_{2012}}{(1 + 0{,}10) \times (1 + 0{,}08)}$$

$$R_{2010} = \frac{195\,000}{(1 + 0{,}10) \times (1 + 0{,}08)} = 164\,141$$

Question 4

Quelle est l'économie réelle réalisée en achetant ce pot de peinture ?

Corrigé

Sans promotion, le pot de 10 litres coûterait 32,90 €, soit 3,29 € le litre.

Avec la promotion, 15 litres valent 32,90 €, soit 2,19 € le litre.

L'économie réalisée est donc de :

$$Economie = \frac{2{,}19}{3{,}29} - 1 = -\,0{,}33$$

soit 33 % d'économie.

Formulation statistique de la réduction (r) :

$$Px_{promo} = Px_{normal} \times (1 + r)$$

$$r = \frac{Px_{promo}}{Px_{normal}} - 1 \ soit \ \frac{2{,}19}{3{,}29} - 1 = -\,0{,}33$$

L'économie réalisée sur le prix au litre est de 33 %.