

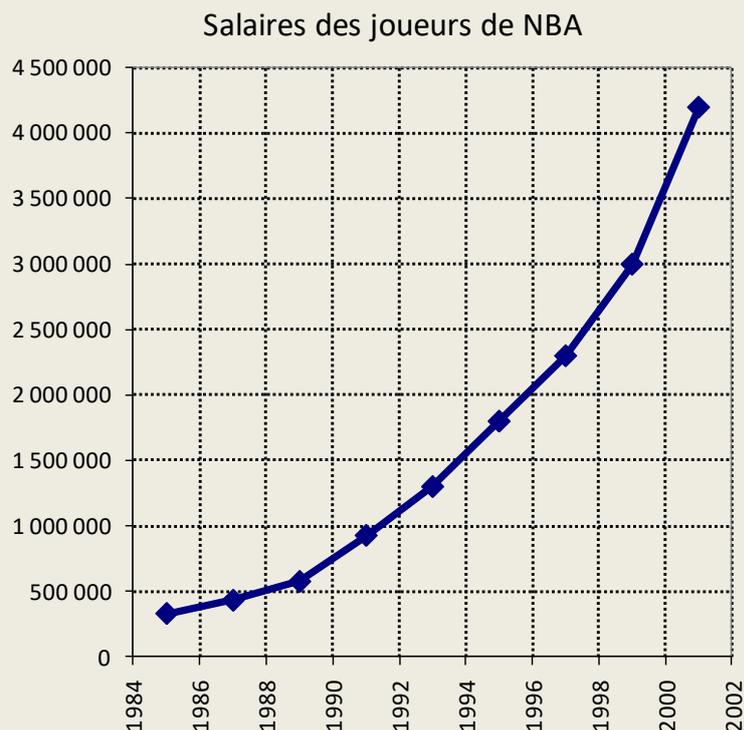
## Exercice 2 : L'évolution du salaire moyen des basketteurs évoluant en NBA

### CORRIGÉ

1 - Représentez graphiquement l'évolution du salaire annuel moyen des basketteurs évoluant dans le championnat professionnel américain (NBA) entre les saisons 1984-85 et 2000-2001 (tableau 1). Calculez le taux annuel moyen d'accroissement du salaire sur cette période. Commentez cette série.

#### Corrigé

Pour placer les points sur le graphique, on peut prendre comme référence le milieu de la saison qui va, globalement, de septembre à juin. Par exemple, pour l'année 1984-1985, on pourra considérer que le salaire est celui au 1<sup>er</sup> janvier 1985.



Le salaire moyen des joueurs de NBA a été multiplié par près de 13 en 16 ans, soit une variation relative annuelle moyenne de +17,2 % ! Graphiquement, il apparaît clairement que cette évolution a été exponentielle.

Calcul de la variation relative totale entre 1985 et 2001 :

$$R = \frac{S_{2001}}{S_{1985}} = \frac{4,2}{0,33} = 12,7$$

### Calcul de la variation relative annuelle moyenne

$$R = (1 + r)^{2001-1985}$$

$$r = \sqrt[16]{R} - 1$$

$$r = \sqrt[16]{\frac{4,2}{0,33}} - 1 = 0,172 = 17,2 \%$$

2 - Ajustez par le calcul cette série. Pour réduire les calculs, on prendra en compte une valeur sur deux (salaire des saisons 1984-85, 1986-87, 1988-89, etc.).

### Corrigé

On peut modéliser l'évolution des salaires des joueurs de NBA à l'aide d'une fonction exponentielle. Pour réaliser cet ajustement, on va commencer par transformer les salaires des joueurs en leur logarithme. En effet, la fonction inverse de la fonction exponentielle est la fonction logarithme. On effectue cette transformation car on sait que lorsqu'une variable augmente de façon exponentielle, le logarithme de cette variable augmente de façon linéaire (cf. figure page suivante). On va donc proposer un ajustement linéaire de la fonction qui lie l'évolution des logarithmes des salaires en fonction des années.

Soit  $Y = \ln(\text{salaire})$  :

Année	Salaire moyen	$Y = \ln(\text{salaire})$
1985	330 000	12,7
1987	431 000	13,0
1989	575 000	13,3
1991	927 000	13,7
1993	1 300 000	14,1
1995	1 800 000	14,4
1997	2 300 000	14,6
1999	3 000 000	14,9
2001	4 200 000	15,3

### Ajustement linéaire des $\ln(\text{salaire})$ en fonction des années

$$\ln(S) = (a \times \text{Années}) + b$$

$$Y = a \times x + b$$

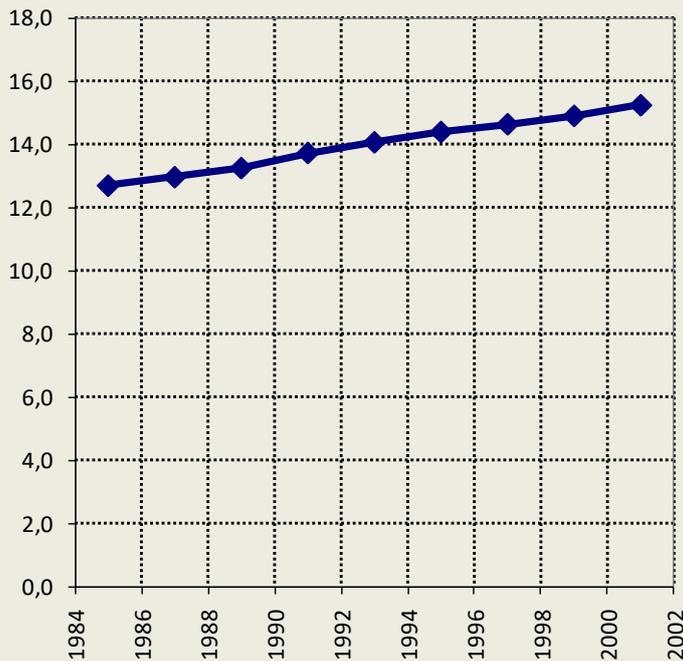
$$a = \frac{COV(x, Y)}{Var(x)} = \frac{\frac{1}{n} \times \sum_{i=1985}^{2001} (x_i - \bar{x}) \times (Y_i - \bar{Y})}{\frac{1}{n} \times \sum_{i=1985}^{2001} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{Y} - a \times \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1985}^{2001} x_i$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1985}^{2001} \ln(S_i) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1985}^{2001} Y_i$$

Ln (Salaires des joueurs de NBA)



Application numérique de l'ajustement linéaire de Y en fonction de x

Saison	Année	Salaire moyen	Y = ln (salaire)	$(x_i - x_{moy}) * (Y_i - Y_{moy})$	$(x_i - x_{moy})^2$
1984 - 1985	1985	330 000	12,7	10,4	64
1986 - 1987	1987	431 000	13,0	6,0	36
1988 - 1989	1989	575 000	13,3	2,8	16
1990 - 1991	1991	927 000	13,7	0,6	4
1992 - 1993	1993	1 300 000	14,1	0,0	0
1994 - 1995	1995	1 800 000	14,4	0,8	4
1996 - 1997	1997	2 300 000	14,6	2,4	16
1998 - 1999	1999	3 000 000	14,9	5,4	36
2000 - 2001	2001	4 200 000	15,3	10,4	64
<b>Total</b>	<b>17 937</b>	<b>14 863 000</b>	<b>126,0</b>	<b>38,8</b>	<b>240</b>

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \times (1985 + 1987 + \dots + 2001) = \frac{17\,937}{9} = 1993$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{9} \times (12,7 + 13,0 + \dots + 15,3) = \frac{126,0}{9} = 14,0$$

$$COV(x, Y) = \frac{1}{9} \times (10,4 + 6,0 + \dots + 10,4) = \frac{38,8}{9} = 4,3$$

$$Var(x) = \frac{1}{9} \times (64 + 36 + \dots + 64) = \frac{240}{9} = 26,7$$

$$a = \frac{4,3}{26,7} = 0,161$$

$$b = 14 - (0,161 \times 1993) = -307$$

On a donc :

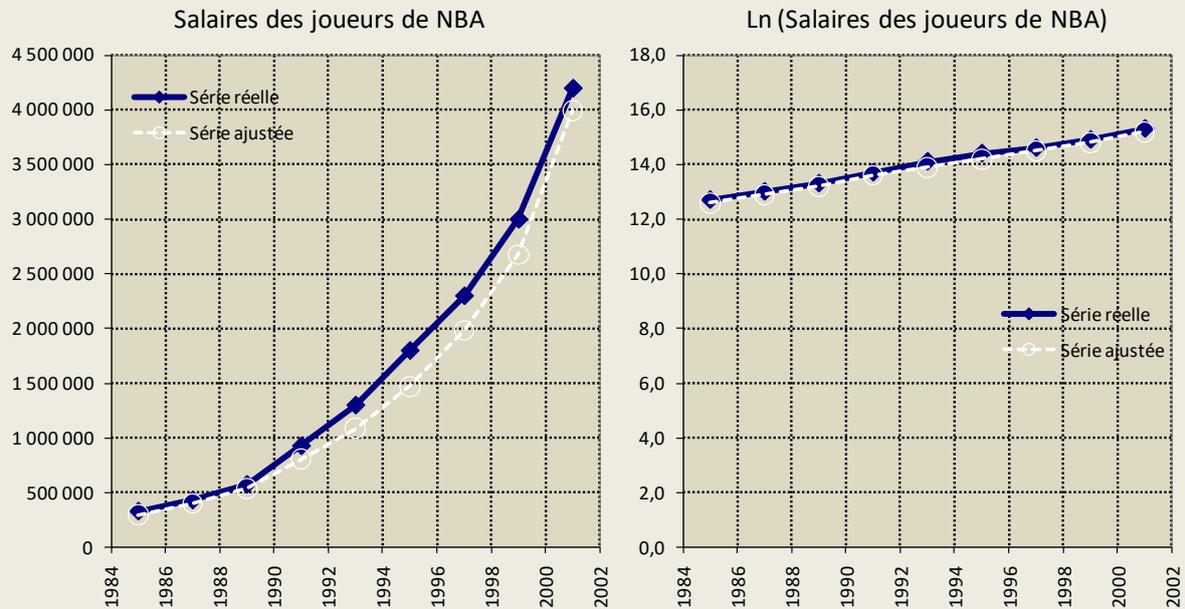
$$Y = 0,161 \times x - 307$$

$$\ln(\text{Salaire}) = 0,161 \times \text{Année} - 307$$

$$\text{Salaire} = \exp(0,161 \times \text{Année} - 307)$$

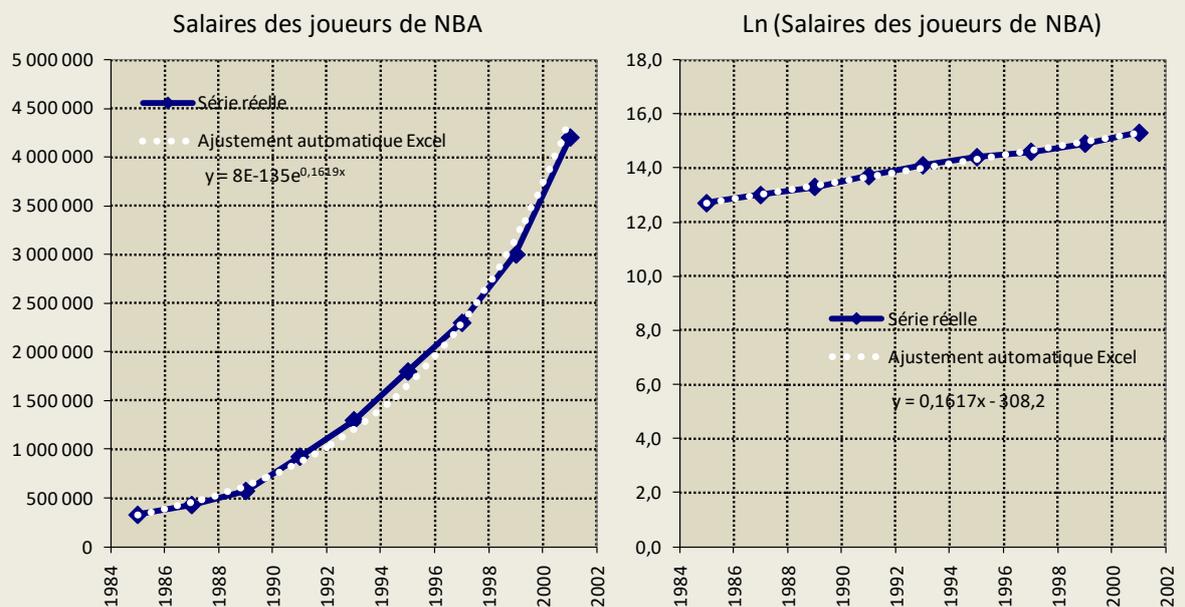
$$y = e^{0,161 \times x - 307}$$

### Représentations graphiques de l'ajustement



### Représentations graphiques des ajustements avec les fonctions automatiques d'EXCEL

On peut ajuster une série de données automatiquement avec Excel. Il faut pour cela sélectionner la série de points réels sur le graphique puis ouvrir la boîte de dialogue (clic bouton droit de la souris) et sélectionner « ajouter une courbe de tendance ». On choisit alors parmi les modèles disponibles celui qui se rapproche le plus du nuage de points réels. Ce mode de détermination conduit au même résultat que la démarche mise en œuvre dans le cadre de cet exercice, sous réserve de conserver la même précision au niveau des calculs, ce qui est le cas quand on réalise les calculs avec un tableur (Excel). C'est plus difficile avec une calculatrice.



3. Évaluez la qualité de votre ajustement. Commentez.

### Corrigé

On peut déjà affirmer, à partir de la confrontation graphique entre la série réelle et la série ajustée que l'ajustement linéaire est très bon. Le calcul le confirme sans surprise.

Pour calculer les coefficients de détermination ( $R^2$ ) et de corrélation linéaire ( $r$ ), on a besoin au préalable de calculer la variance et l'écart-type de  $Y$  (ou  $\text{Ln}(\text{Salaire})$ ).

Attention : comme l'ajustement linéaire a été réalisé sur la base de la relation entre l'année et le logarithme népérien des salaires ( $\text{Ln}(y) = f(x)$  ou  $Y = f(x)$ ), on cherche à mesurer l'intensité du lien statistique entre ces deux variables ( $x$  et  $Y$ ).

Mais cette mesure est également valable pour la relation entre l'année ( $x$ ) et le salaire ( $y$ ).

$$R^2 = \frac{COV(x,Y)^2}{Var(x) \times Var(Y)}$$

$$r = \frac{COV(x,Y)}{\sigma_x \times \sigma_Y}$$

Détermination de la variance des  $\text{Ln}(\text{salaire})$

Année	Salaire moyen	Y = Ln (salaire)	$(Y_i - Y_{\text{moy}})^2$
1985	330 000	12,7	1,7
1987	431 000	13,0	1,0
1989	575 000	13,3	0,5
1991	927 000	13,7	0,1
1993	1 300 000	14,1	0,0
1995	1 800 000	14,4	0,2
1997	2 300 000	14,6	0,4
1999	3 000 000	14,9	0,8
2001	4 200 000	15,3	1,7
<b>Total</b>	<b>14 863 000</b>	<b>126,0</b>	<b>6,4</b>

$$Var(Y) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1985}^{2001} (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$Var(Y) = \frac{1}{9} \times (1,7 + 1,0 + \dots + 1,7) = \frac{6,4}{9} = 0,7$$

Calcul des coefficients de détermination ( $R^2$ ) et de corrélation linéaire ( $r$ )

$$R^2 = \frac{(4,3)^2}{26,7 \times 0,7} = \frac{18,49}{18,69} = 0,989$$

$$r = \frac{4,3}{\sqrt{26,7} \times \sqrt{0,7}} = 0,995$$

4. Estimez le salaire annuel moyen au cours de la saison 2006-2007. Comparez votre résultat au chiffre publié pour cette saison-là (5,215 millions de \$). Commentez.

### Corrigé

On va estimer le salaire moyen des joueurs de NBA en 2006-2007 (soit au 1<sup>er</sup> janvier 2007 pour tenir compte de la convention adoptée dans le cadre de cet exercice) sur la base de la relation suivante :

$$S_{2007} = \exp(0,161 \times 2007 - 307)$$

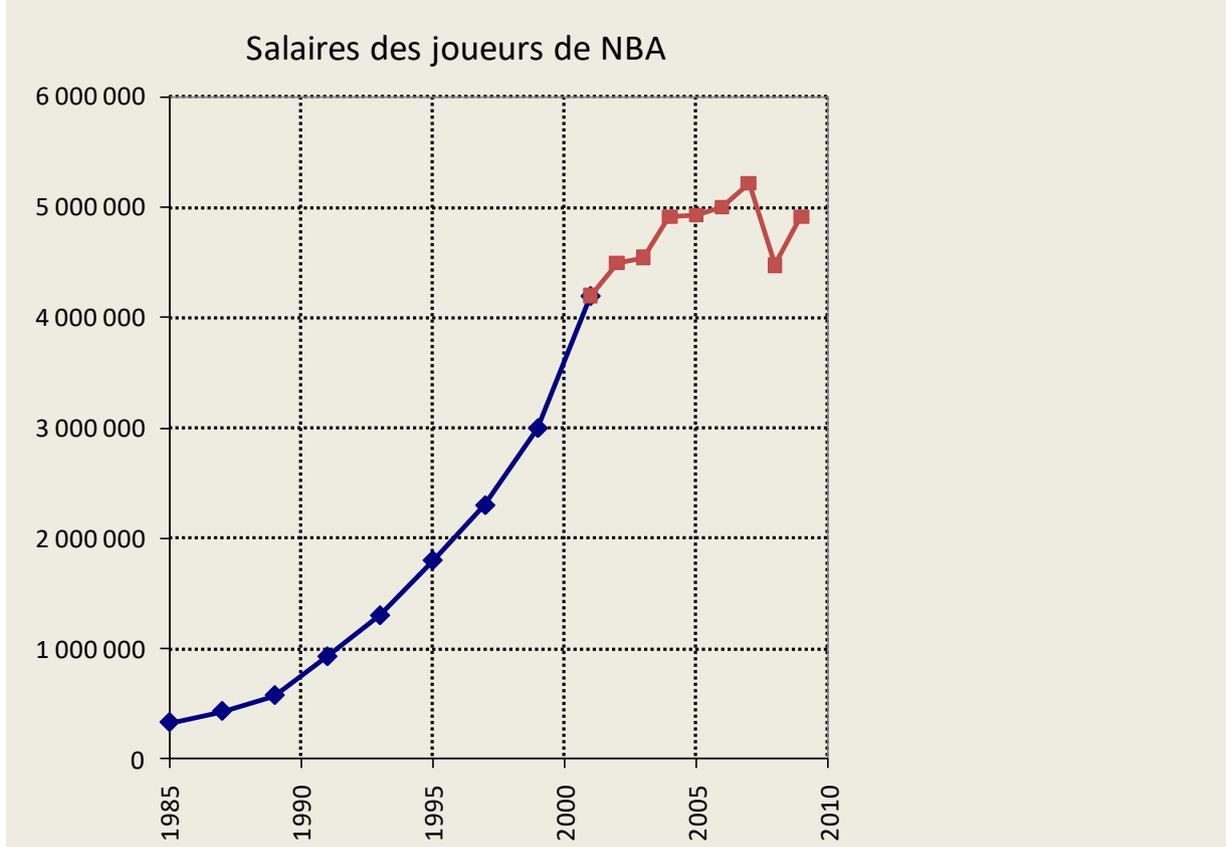
$$S_{2007} = \exp(16,127)$$

$$S_{2007} = 10\,089\,441 \$$$

L'estimation du salaire pour la saison 2006-2007 conduit à un résultat quasiment deux fois plus important que le salaire moyen réel attribué au cours de cette saison.

**MORALITE : un excellent ajustement sur une période donnée (même longue : 16 ans dans ce cas) ne conduit pas nécessairement à un bon modèle prévisionnel. Il ne faut donc pas « s'emballer » quand on réalise des projections sur la base de tendances passées, même quand on peut les modéliser avec une grande précision comme c'est le cas ici. C'est ce qu'oublient bien souvent les économètres !**

Le salaire des joueurs a bien moins progressé à partir du début des années 2000. Une meilleure connaissance de la NBA aurait pu nous alerter. En effet, au début de la saison 1998-1999, une longue grève des joueurs (la moitié de la saison) a eu pour objet de s'opposer à la volonté des propriétaires des clubs de limiter la masse salariale de leur équipe. Le compromis entre joueurs et propriétaires des franchises a eu pour effet un meilleur contrôle de l'augmentation des salaires (cf. figure ci-dessous). Depuis le milieu des années 2000, il semble que l'on ait atteint une valeur limite, voisine de 5 millions de \$. Si cela devait se confirmer, l'évolution du salaire moyen aurait suivi, depuis le début des années 1980 un modèle de type logistique.



## ANNEXE

Tableau 1 : salaire annuel moyen des basketteurs évoluant en NBA  
(1984-85 à 2000-2001)

<i>Saison</i>	<b>Salaire annuel moyen (en \$)</b>
2000 - 2001	4 200 000
1999 - 2000	3 600 000
1998 - 1999	3 000 000
1997 - 1998	2 600 000
1996 - 1997	2 300 000
1995 - 1996	2 000 000
1994 - 1995	1 800 000
1993 - 1994	1 500 000
1992 - 1993	1 300 000
1991 - 1992	1 100 000
1990 - 1991	927 000
1989 - 1990	717 000
1988 - 1989	575 000
1987 - 1988	502 000
1986 - 1987	431 000
1985 - 1986	382 000
1984 - 1985	330 000

Source : <http://perso.orange.fr/nba-history/salaires.htm>