

**Examen de fondements des mathématiques, L1 MIASHS UP1**  
(session de janvier 2017, durée : 110 minutes)

**Exercice 1** Donner la négation des propositions suivantes :

1.  $(\forall x \in A \exists y \in B x \geq y) \Rightarrow (\exists z \in A \forall t \in B z \geq t)$
2.  $(0 + 1 = 2) \vee (1 + 1 = 2)$

**Exercice 2**

1. Donner un exemple de prédicat sur  $\mathbb{R}^2$
2. Donner un exemple de prédicat sur  $\mathbb{R}$ .
3. Donner un exemple de prédicat sur  $\mathbb{R}$  qui soit vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
4. Donner un exemple de prédicat sur  $\mathbb{R}^2$  qui soit vrai pour au moins un  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3** On considère la relation  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  définie par

$$X \mathcal{S} Y \text{ si et seulement si } (X = Y \text{ ou } \forall x \in X \forall y \in Y x \leq y)$$

Montrer que  $\mathcal{S}$  est une relation d'ordre? Est-elle totale?

**Exercice 4**

1. Donner un exemple de fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui soit injective et non surjective.
2. Donner un exemple de fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui soit surjective et non injective.
3. La fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $g(x, y) = (x + y, x - y)$  est-elle injective? surjective? bijective?

**Exercice 5** Soit  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Déterminer  $f(0)$ .
2. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = f(-x)$
3. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = f(-x)$
4. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{Q} f(nx) = nf(x)$
5. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{Q} f(nx) = nf(x)$
6. On pose  $a = f(1)$ . Montrer que  $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$