Économétrie 1, M1 MAEF, Session 2
13/06/2022, Durée : deux heures
Documents et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Nom :	Prénom :

Exercice 1.
Considérons le modèle gaussien

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad \text{avec} \quad i = 1, \dots, 4 \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, 7,$$

où $\mathbb{E}(\varepsilon_{ij}) = 0$, $\mathrm{V}(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$, $\forall (i, j)$ et les ε_{ij} sont indépendants.
On a lancé les codes suivants :

```
Y = c(23.4, 24.4, 24.6, 24.9, 25.0, 26.2, 26.3, 22.5, 22.9, 23.7, 24.0, 24.4, 24.5,
25.3, 26.0, 26.2, 26.4, 26.7, 26.9, 27.4, 28.5, 22.1, 22.5, 23.5, 24.5, 24.6, 26.2, 26.7)
I = c(rep(1,7), rep(2,7), rep(3,7), rep(4,7)); I = as.factor(I)
summary(lm(Y~I)); anova(lm(Y~I))
```

Voici les résultats :

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  24.9714     0.4526  55.178  < 2e-16 ***
I2           -1.0714     0.6400  -1.674  0.10710
I3            1.9000     0.6400   2.969  0.00668 **
I4           -0.6714     0.6400  -1.049  0.30459

Response: Y
Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
I          3 36.418 12.1394  8.4672 0.000517 ***
Residuals 24 34.409  1.4337
```

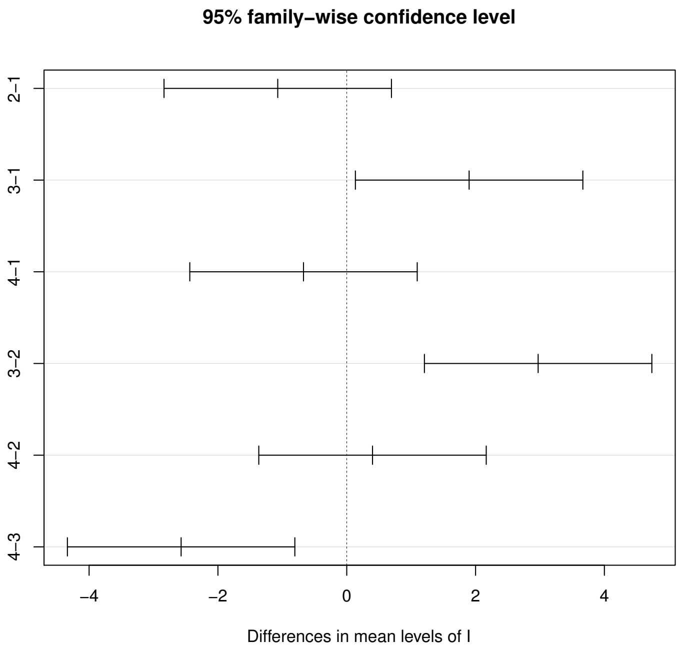
1. Pouvez vous remplir le tableau suivant?

1) $\widehat{\mu_1} =$	
2) $\widehat{\mu_2} =$	
3) $\widehat{\mu_3} =$	
4) $\widehat{\mu_4} =$	

2. Que signifient elles les sorties numériques $< 2e - 16$, 0.00668, 0.000517 et 36.418 ?

1) $< 2e - 16$	
2) 0.00668	
3) 0.000517	
4) 36.418	

3. On a tapé la commande `plot(TukeyHSD(aov(Y~I)))`. La sortie est présentée ci dessous. Pouvez vous commenter ce graphique ? Est il cohérent avec les sorties numériques ?



Exercice 2.

On considère un échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes dans lequel X_i suit une loi $\mathcal{N}(\mu + \beta p_i, \sigma^2)$ avec μ, β et σ^2 des paramètres inconnus et $(p_1, \dots, p_n)$ des nombres réels supposés connus. On cherche à construire des estimateurs de μ, β et σ^2

1. On note $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\vec{1} = (1, \dots, 1)$ et $E = [\vec{1}, \vec{p}]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $\vec{1}$ et $\vec{p}$. Donner une base orthonormale de E, (e_1, e_2).

2. Rappelons que $P_E X = \langle X, e_1 \rangle \cdot e_1 + \langle X, e_2 \rangle \cdot e_2$ et $P_{E^\perp} X = X - P_E X$. Calculer $P_E X$ et $P_{E^\perp} X$.

3. En faisant la factorisation, réécrire $P_E X$ sous forme de $a \cdot \vec{1} + b \cdot \vec{p}$. En déduire les estimateurs de μ et β. Donner ces estimateurs en fonction de X_i et p_i.

4. Quelle est la loi de $\|P_{E^\perp}(X - \mu - \beta \vec{p})\|^2$? Proposer un estimateur sans biais de σ^2, $\widehat{\sigma^2}$. Calculer la variance de cet estimateur.

5. Comment s'écrit l'estimateur $\widehat{\sigma^2}$ lorsque $p_1 = \dots = p_n = p$? Quelle est sa loi dans ce cas ?