Économétrie 1, M1 MAEF, Partiel
10/01/2019, Durée : deux heures
Documents, téléphones portables et l'usage de la calculatrice ne sont pas autorisés. Le barème est indicatif. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.

Exercice 1 *(3 points)*
On a tapé les commandes suivantes :

```
age = c(35, 45, 55, 65, 75); tension = c(114, 124, 143, 158, 166)
residuals(lm(tension~age))
```

Voici les résultats :

```
1    2    3    4    5
0.6 -3.2  2.0  3.2 -2.6
```

1. La somme de ces cinq nombres obtenus vaut zéro. Est elle surprenante, pourquoi ?

On tape ensuite les commandes :

```
(resi = residuals(lm(tension~age-1))); sum(resi)
```

Voici les résultats :

```
1          2          3          4          5
26.841860  11.939535   6.037209  -3.865116 -20.767442

[1] 20.18605
```

2. Cette fois ci la somme des cinq nombres obtenus ne vaut pas zéro. Est elle surprenante, pourquoi ?

Exercice 2 *(3 points)*
On a tapé les commandes suivantes :

```
Y = c(21.0, 21.0, 22.8, 21.4, 18.7, 18.1, 14.3, 24.4, 22.8, 19.2)
X1 = c(3.90, 3.90, 3.85, 3.08, 3.15, 2.76, 3.21, 3.69, 3.92, 3.92)
X2 = c(160, 160, 108, 258, 360, 225, 360, 147, 141, 167)
X3 = c(16, 17, 18, 19, 17, 20, 16, 20, 23, 18)
drop1(lm(Y~X1+X2+X3), test = "F")
```

Voici les résultats :

```
Single term deletions
Model:
Y ~ X1 + X2 + X3
       Df Sum of Sq    RSS    AIC F value Pr(>F)
<none>              26.582 17.776
X1      1    0.3321 26.914 15.901  0.0749 0.7934
X2      1    8.6174 35.199 18.584  1.9451 0.2126
X3      1    3.9415 30.524 17.159  0.8897 0.3820
```

1. Que signifient elles les valeurs numériques 8.6174, 26.582, 35.199 et 17.159 ?
2. Quel modèle retient on pour la prochaine étape ?

Exercice 3 *(8 points)*

On considère un modèle suivant

$$Y_i = \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

où X_i sont déterministes et ε_i sont les variables aléatoires gaussiennes i.i.d. d'espérance 0 et de variance σ^2. Nous voulons estimer les paramètres β_1, β_2 et σ^2 à partir des observations (X_i, Y_i).

1. Quelles sont les lois de Y_i ? Les Y_i sont elles i.i.d. ?
2. Proposer un estimateur $(\widehat{\beta_1}, \widehat{\beta_2}, \widehat{\sigma^2})$ pour $(\beta_1, \beta_2, \sigma^2)$. (Indication : par la méthode des moindres carrés ou le maximum de vraisemblance)
3. L'estimateur que vous proposez est il sans biais ?
4. Calculer les variances de $\widehat{\beta_1}$, $\widehat{\beta_2}$ et $\widehat{\sigma^2}$.
5. Si les ε_i ne sont pas gaussiennes que vaut alors l'espérance de $(\widehat{\beta_1}, \widehat{\beta_2}, \widehat{\sigma^2})$?