Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne — L3 MIASHS
2023/24 — M. Gourdel

Intégration - Probabilités
TD 3

Exercice 1.

Soit un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, et μ_1, μ_2 des mesures[1] *et α un nombre réel positif.*

1. *Montrer que $\mu_1 + \mu_2$ est une mesure.*
2. *Est-ce que $\mu_1 - \mu_2$ est une mesure ?*
3. *On suppose que $\mu_1 \geq \mu_2$. Est-ce que $\mu_1 - \mu_2$ est une mesure ?*
4. *Est-ce que $\alpha\mu_1$ est une mesure ?*

Exercice 2.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ que l'on munit de la mesure de comptage μ_C. Pour chaque entier n, on considère la fonction ν_n définie sur $\mathcal{A}$ par $\nu_n(A) = \mu_C(A \cap \{n, n+1, \ldots\})$.

1. *Montrer que pour chaque entier n, ν_n est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.*
2. *Montrer que pour chaque partie A de $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$), $\lim_{n\to+\infty} \nu_n(A)$ existe. On appellera $\overline{\nu}(A)$ cette limite.*
3. *Montrer que pour tout singleton $\{p\}$ (où p est un entier), $\overline{\nu}(\{p\}) = 0$.*
4. *Montrer $\overline{\nu}(\mathbb{N}) = +\infty$.*
5. *En déduire que $\overline{\nu}$ n'est pas une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.*

Exercice 3.

On admet que pour toute famille $(u_{p,q})_{p\in\mathbb{N},q\in\mathbb{N}}$ à termes positifs, on a l'égalité dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$$

Soit $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω et $(\mu_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures positives sur A. On définit la fonction $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ en posant :

$$\text{Pour tout } A \in \mathcal{A},\ \nu(A) = \sum_{q=0}^{+\infty} \mu_q(A)$$

Démontrer que ν est une mesure positive.

Exercice 4.

On introduit une définition locale qui n'est pas à mémoriser.

Définition : *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, Soit $A \in \mathcal{A}$, on dit que A est un insécable de la tribu $\mathcal{A}$ s'il est non vide et s'il ne possède pas de sous ensemble non trivial dans $\mathcal{A}$. Formellement, soit $A \neq \emptyset$, A est un insécable si*

$$\left\{\begin{array}{l} B \subset A \\ \text{et} \\ B \in \mathcal{A} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B = \emptyset \\ \text{ou} \\ B = A \end{array}\right.$$

On va noter $\mathrm{Ins}(\mathcal{A})$ l'ensemble des insécables de $\mathcal{A}$.

1. On rappelle la convention, le mot mesure signifie mesure positive.

1. *On considère (cf. td 2) l'ensemble* $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ *muni de la tribu* $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,3\}, \{2,4\}, \{5,6\}, \{1,2,3,4\}, \{2,4,5,6\}, \{1,3,5,6\}, \Omega\}.$$

   Montrer que l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ *n'est pas un insécable.*

2. *Soit* A_1 *et* A_2 *deux insécables de* $\mathcal{A}$*, montrer qu'ils sont disjoints.*
3. *Soit* A *un élément de* $\mathcal{A}$ *qui est un singleton, alors* A *est un insécable.*
4. *Soit* A *un élément insécable de* $\mathcal{A}$ *et* $(B_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$*. On pose* $D_n = B_n \cap A$*. Montrer que pour tout* n*, on a l'alternative* $D_n = \emptyset$ *ou* $D_n = A$*, puis que on a l'alternative* B_n *contient* A *ou* B_n *est disjoint de* A*.*

Exercice 5.

On reprend la définition de l'exercice 4. On considère l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*.*

1. *Montrer que les seuls ensembles insécables de la tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *sont les singletons de* $\mathbb{R}$*.*
2. *On considère la famille* $\mathcal{D}$ *définie par*

   $A \in \mathcal{D}$ *si et seulement si [D est au plus dénombrable ou le complémentaire de D est au plus dénombrable].*

   Montrer que $\mathcal{D} \neq \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*
3. *Montrer que* $\mathcal{D}$ *est une tribu sur* $\mathbb{R}$*.*
4. *On considère une tribu alternative sur* $\mathbb{R}$ *notée* $\mathcal{A}$ *et qui est la tribu engendré par les les singletons de* $\mathbb{R}$*. Montrer que* $\mathcal{A} = \mathcal{D}$*.*

Exercice 6.

On reprend la définition de l'exercice 4. On considère une tribu $\mathcal{A}$ *quelconque sur* $\mathbb{N}$*. Soit* A *un élément non vide de* $\mathcal{A}$*, on pose* $\psi_A : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ *définie par*

$$\psi_A(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \subset B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Soit* $\{a\}$ *un singleton appartenant à* $\mathcal{A}$ *(il peut ne pas en exister). Montrer que* ψ_A *est une mesure de Dirac sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{A})$*.*
2. *Montrer que si* A *n'est pas un insécable de la tribu* $\mathcal{A}$*, alors* ψ_A *n'est pas une mesure sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{A})$*.*
3. *Montrer que si* A *est un insécable de la tribu* $\mathcal{A}$*, alors* ψ_A *est une mesure sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{A})$*.*