Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne — L3 MIASHS
2023/24 — M. Gourdel

Intégration - Probabilités
TD 4

Exercice 1

Soit X un ensemble non vide au plus dénombrable. Soit $\nu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure positive qui est constante sur les singletons :

$$\text{il existe } a \in \overline{\mathbb{R}}_+,\ \forall x \in X,\ \nu(\{x\}) = a.$$

1. *On suppose que X est fini de cardinal p. Déterminer explicitement ν.*
2. *On suppose que $X = \mathbb{N}$ et que ν est une mesure finie. Démontrer que ν est la mesure nulle.*

Exercice 2

On considère un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\overline{\omega}$ un point de Ω.

1. *On rappelle que la mesure de dirac notée $\delta_{\overline{\omega}} : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est définie par pour tout $A \in \mathcal{A}$,*

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin A \\ 1 & \text{si } a \in A \end{cases}$$

   Montrer qu'il s'agit d'une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

2. *On suppose que $\{\overline{\omega}\} \in \mathcal{A}$ et que μ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ vérifiant $\mu(\{\overline{\omega}\}) = 1$, montrer que μ est la mesure de Dirac au point $\overline{\omega}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$.*
3. *On suppose que μ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ vérifiant il existe un insécable A (relire la définition dans le TD3) de $\mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 1$ et $\overline{\omega} \in A$, montrer que μ est la mesure de Dirac au point $\overline{\omega}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$.*
   Indication : *Si $B \in \mathcal{A}$, alors $B = (B \cap A) \sqcup (B \cap A^C)$.*
4. *On considère l'ensemble $\Omega = \mathbb{R}$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+, \{0\}, \mathbb{R}_+\}$. Justifier brièvement que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$, puis comparer les deux mesures δ_3 et δ_5 sur $\mathcal{A}$.*

Exercice 3

Soit $(a_n)_n$ une suite à termes réels positifs, $(a_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

1. *On définit la fonction $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ en posant, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,*

$$\nu(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \delta_n(A).$$

   Expliquer brièvement pourquoi cette formule a un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$.

2. *Démontrer que ν est une mesure positive.*
3. *Démontrer que ν est σ-finie.*

4. *A quelle condition* ν *est-elle finie ?*
5. *A quelle condition* ν *est-elle une probabilité sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *?*

Exercice 4

Soit $p \in [0,1]$*, et* $q = 1 - p$*. On considère* $\Omega = \{a, b\}$ *un ensemble à deux éléments et* $\mathbb{P}$ *la mesure de probabilité définie sur la tribu* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *par* $\mathbb{P}(\{a\}) = p$ *et* $\mathbb{P}(\{b\}) = q$*.*

1. *On pose* X *la fonction de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *définie par* $X(a) = 1$*,* $X(b) = 0$*. Montrer que* X *est une variable aléatoire.*
2. *On appelle comme dans le cours* $\mathbb{P}_X$ *la loi de probabilité de* X *qui est définie sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*,* $P_X(A) = P(X \in A) = P(X^{-1}(A))$*. Déterminer* $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}_-)$*,* $\mathbb{P}_X(\{1/2\})$*,* $\mathbb{P}_X(\{0,1\})$*,* $\mathbb{P}_X(\mathbb{Q})$*. Reconnaitre la loi de* X*.*

Exercice 5

On considère l'espace de probabilité $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_5)$*. On a vu en cours que* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $X(t) = 2t$ *était une variable aléatoire de* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_5)$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*.*

1. *Calculer en fonction de* $\alpha \in \mathbb{R}$*, la valeur de* $\delta_5(]-\infty, \alpha])$ *et de* $\delta_5(]-\infty, \alpha[)$*.*
2. *Donner la définition de la loi* $\mathbb{P}_X$ *de probabilité de* X*.*
3. *Quel est le domaine de definition de* $\mathbb{P}_X$ *?*
4. *Déterminer* F_X *la fonction de répartition.*
5. *Montrer que* $\mathbb{P}_X(\{t\}) = F_X(t) - \lim_{x \to t^-} F_X(t)$*. En déduire la valeur de* $\mathbb{P}_X$ *sur chaque singleton puis identifier* $\mathbb{P}_X$*.*

Exercice 6

On considère Ω *un ensemble quelconque et* $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1)$*. On suppose que* $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *pour* $i = 1, 2$*. On note* $\tau(X)$ *la tribu engendrée par* X*.*

1. *Justifier que si* $\mathcal{C}_1 \subset \tau(\mathcal{C}_2)$ *et* $\mathcal{C}_2 \subset \tau(\mathcal{C}_1)$ *alors* $\tau(\mathcal{C}_1) = \tau(\mathcal{C}_2)$*.*
2. *Soit* $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$*. On définit l'ensemble des complémentaires*

$$\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \exists D \in \mathcal{D} \text{ vérifiant } E = \Omega \setminus D\}.$$

   Montrer que $\tau(\mathcal{D}) = \tau(\mathcal{E})$*.*

3. *On suppose que* Ω *est un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé. On considère* $\mathcal{O}$ *(respectivement* $\mathcal{F}$*) l'ensemble des ouverts (respectivement l'ensemble des fermés) de* Ω*. En déduire que* $\tau(\mathcal{O}) = \tau(\mathcal{F})$*.*
4. *On suppose que* $\Omega = \mathbb{R}$*, on note* $\mathcal{IO}_{-\infty}$ *l'ensemble des intervalles de la forme* $]-\infty, a[$ *et* $\mathcal{IF}_{\infty}$ *l'ensemble des intervalles de la forme* $]b, +\infty, [$*. Montrer que* $\mathcal{IO}_{-\infty}$ *n'est pas une tribu.*
5. *Que peut-on déduire sur* $\tau(\mathcal{IO}_{-\infty})$ *?*

Exercice 7

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On définit l'ensemble $\mathcal{T}$ par

$$\mathcal{T} = \left\{ B \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ pour lequel } \exists (A_1, A_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \,\middle|\, \begin{array}{l} A_1 \subset B \subset A_2 \\ \mu(A_2 \setminus A_1) = 0 \end{array} \right\}$$

1. *Vérifier que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, en particulier que $\Omega \in \mathcal{T}$.*
2. *Vérifier que $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire (on a intérêt à faire un dessin pour comprendre l'intuition).*
3. *Soit $B_0, B_1, B_2, \ldots$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Montrer que $\cup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{T}$.*
4. *Soit Ω quelconque que l'on munit de la tribu $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ et de μ la fonction identiquement nulle sur $\mathcal{A}$. Prendre conscience que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ est alors égal à $\mathcal{P}(\Omega)$.*
5. *Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ que l'on munit de la tribu $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}, \Omega\}$ et d'une probabilité truquée $\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = 1$ tandis que $\mathbb{P}(\{1,3,5\}) = 0$. Déterminer la tribu $\mathcal{T}$.*