Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne — L3 MIASHS
2023/24 — M. Gourdel

Intégration - Probabilités
TD 5

Exercice 1

On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

1. *Montrer que la condition*
$$\mathbb{P}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ e^{-}1\frac{1}{p!} & \text{si } n \text{ pair, } n = 2p. \end{cases}$$
définit une unique probabilité sur cet espace.
2. *Soit* (u_n) *une suite réelle. Montrer que l'on peut définir ainsi une variable aléatoire* X *définie par* $X(n) = u_n$.
3. *On considère* X *comme dans la question précédente pour la suite* $(u_n)_n$ *définie par* $u_0 = \pi$ *puis* $u_n = 1/n$. *Déterminer pour* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_X(\{\alpha\}) := \mathbb{P}(X = \alpha)$. *En déduire la loi* $\mathbb{P}_X$.

Exercice 2

On considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *quelconque. Un élément* $\omega \in \Omega$ *est appelé un atome de la loi de probabilité* μ *si le singleton* $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ *et si* $\mu(\{\omega\}) \neq 0$. *L'ensemble des atomes sera noté* Ω_a.

1. *Déterminer les atomes de la mesure de Borel sur* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer les atomes d'une proba non truquée pour* $\Omega = \{0, \ldots, 36\}$ *muni de la tribu des couleurs.*
3. *On considère un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Montrer en s'inspirant*[1] *du TD1 que l'ensemble des atomes* Ω_a *est au plus dénombrable.*
4. *On considère un espace mesuré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ*-fini. Montrer que l'ensemble des atomes* Ω_a *est au plus dénombrable.*
5. *On considère un espace mesuré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *quelconque. Que peut-on dire dire du cardinal de* Ω_a *?*
6. *On considère le cas de la variable aléatoire* X *de l'exercice 1. Caractériser l'ensemble des atomes de* $\mathbb{P}$ *et de* $\mathbb{P}_X$.

Exercice 3

On rappelle les hypothèses du lemme de recollement. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ *et* $(Y, \mathcal{T})$ *deux espaces mesurables. Soit* $f : \Omega \to Y$. *Il existe un ensemble* I *de cardinal au plus dénombrable et une famille* $(A_i)_{i \in I}$ *tels que*

- *la collection* $(A_i)_{i \in I}$ *constitue une partition de l'ensemble* Ω.
- *la restriction de* f *à* A_i*, que nous noterons* f_i *est mesurable de* $(A_i, \mathcal{A}_{A_i})$ *dans* $(Y, \mathcal{T})$. *(On rappelle que* $\mathcal{A}_{A_i}$ *est la tribu trace/induite).*

1. On pourra considérer pour n entier strictement positif $A_n = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{P}(\{\omega\}) \geq 1/n\}$.

1. *On suppose tout d'abord que $I = \{1,2\}$. Soit B un élément de la tribu d'arrivée $\mathcal{T}$. Justifier que*
$$f^{-1}(B) = f_1^{-1}(B) \cup f_2^{-1}(B).$$
Montrer que $E_i := f_i^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. En déduire que f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(Y, \mathcal{T})$.
2. *On suppose désormais que I est au plus dénombrable. S'inspirer du cas particulier pour démontrer le résultat général : f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(Y, \mathcal{T})$.*

Exercice 4

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On se donne une définition :

Définition 1 *Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux tribus contenues dans $\mathcal{A}$. On dit que les deux tribus sont indépendantes si pour tout $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$, on a $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$.*

1. *Montrer que si on pose $\mathcal{A}'$ la tribu grossière sur Ω, alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont indépendantes.*
2. *Montrer que si la tribu $\mathcal{A}_1$ est indépendante avec elle-même alors les événements de $\mathcal{A}_1$ sont de nature soit "certaine" (proba 1) soit "impossible" (proba 0).*

On suppose désormais $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ qui sera muni de $\mathcal{A}$ la tribu la plus fine et la probabilité uniforme.

4. *On considère $\mathcal{A}_1$ (respectivement $\mathcal{A}_2$) la tribu engendrée par la partition $(\{1,2\}, \{3,4,5,6\})$ (respectivement la tribu engendrée par la partition $(\{1,2,5\}, \{3,4,6\})$. Montrer que les deux tribus ne sont pas indépendantes.*
5. *On considère sur Ω deux partitions de cardinal 2 et de tailles "équilibrées". Ce qui signifie formellement que la première partition s'écrit $(E, \Omega \setminus E)$ et la deuxième $(F, \Omega \setminus F)$ où $card(E) = card(\Omega \setminus E) = card(F) = card(\Omega \setminus F) = 3$.*
   Montrer que les deux tribus ne sont pas indépendantes.

On suppose désormais $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ qui sera muni de $\mathcal{A}$ la tribu la plus fine et la probabilité uniforme.

6. *On considère $\mathcal{A}_1$ (respectivement $\mathcal{A}_2$) la tribu engendrée par la partition $(\{1,2\}, \{3,4\})$ (respectivement la tribu engendrée par la partition $(\{1,3\}, \{2,4\})$. Combien de vérifications faut il effectuer pour montrer que les deux tribus sont indépendantes ? Le sont-elles ?*

On rappelle la caractérisation de la tribu engendrée par f. Si Ω est un ensemble quelconque, $(Y, \mathcal{U})$ un espace mesurable, et f une application de Ω dans Y, alors on définit l'ensemble $\mathcal{A} = \tau(f)$ la tribu engendrée par f comme l'unique tribu sur Ω telle que

$$\begin{cases} f \in \mathcal{L}^0((\Omega, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{U})) \\ \text{Pour toute tribu } \mathcal{T} \text{ de } \Omega, \; f \in f \in \mathcal{L}^0((\Omega, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{U})) \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{T} \end{cases}.$$

Exercice 5

On considère un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ et $A \subset \Omega$. On considère la fonction indicatrice de A. On rappelle que $\mathbf{1}_A$ est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et 0 sinon.

1. *On étudie tout d'abord $A \notin A$. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer $\mathbf{1}_A^{-1}(\{\alpha\})$. En déduire que $\mathbf{1}_A \notin \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$.*

2. *On étudie ensuite $A \in A$. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer $\mathbf{1}_A^{-1}(\{\alpha\})$. Puis pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, déterminer $\mathbf{1}_A^{-1}(B)$. En déduire que dans ce cas, $\mathbf{1}_A \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$.*
3. *On suppose à nouveau que $A \in A$. Utiliser le lemme de recollement pour justifier que $\mathbf{1}_A \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$.*
4. *On considère sur Ω la tribu alternative $\mathcal{A}' = \tau(\{A, \Omega \setminus A\})$. Ecrire explicitement $\mathcal{A}'$ puis en déduire que $\mathbf{1}_A \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{R})$.*
5. *En utilisant la définition de la tribu engendrée par $\mathbf{1}_A$ que nous noterons $\mathcal{A}''$ (On considère toujours par défaut que la tribu sur $\mathbb{R}$ est la tribu des boréliens.) Déduire des questions précédentes que $\mathcal{A}'' \subset A'$*
6. *Conclure que la tribu engendrée par l'application $\mathbf{1}_A$ est $\mathcal{A}'$.*

EXERCICE 6

On considère un espace quelconque Ω. On considère $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application telle que l'ensemble $f(\Omega)$ est au plus dénombrable. On va noter cet ensemble $\{b_i \mid i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$. On suppose dans cette écriture que si $i \neq j$, alors $b_i \neq b_j$. On pose ensuite $A_i = f^{-1}(\{b_i\})$. On note $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par f.

1. *Montrer que les ensembles A_i constituent une partition de Ω.*
2. *Montrer que chaque A_i est un élément de $\mathcal{A}$.*

En notant $\mathcal{C} = \{A_i \mid i \in I\}$, on notera $\mathcal{A}'$ la tribu engendrée par la partition de $(A_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire $\mathcal{A}' = \tau(\mathcal{C})$.

3. *Montrer que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.*
4. *Montrer que $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{R})$.*
5. *Conclure que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.*