Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
 L3 MIASHS
2023/24
 M. Gourdel

Intégration - Probabilités
TD 6

EXERCICE 1

1. *Soit $\mathcal{D}$ une tribu sur X (ensemble au plus dénombrable), montrer que $\mathcal{D}$ est la tribu discrète si et seulement si tous les singletons sont dans $\mathcal{D}$.*
2. *Soit $\mathcal{A}$ la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$. Justifier qu'elle contient tous les singletons mais que ce n'est pas la tribu discrète.*
3. *Soit X un sous ensemble fini de $\Omega = \mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{A}$ des boréliens). Montrer que la tribu trace $\mathcal{A}_X$ est la tribu discrète.*
4. *Si X un sous ensemble fini de $\Omega = \mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{A}$ des boréliens) et si $f : X \to \mathbb{R}$, alors $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{A}_X, \mathbb{R})$.*

EXERCICE 2

1. *On veut montrer l'équivalence entre*
   i) La fonction f est étagée (au sens des partitions mesurables finies)
   ii) La fonction $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ et $f(\Omega)$ est fini.
   iii) La fonction f est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables.

   Indication : *on pourra montrer*
   i) $\Leftrightarrow$ ii) (double implication)
   i) $\Rightarrow$ iii)
   iii) $\Rightarrow$ ii)
2. *Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est étagée. Est-elle intégrable au sens du cours de L3 ? Est elle intégrable au sens de Riemann ?*
3. *Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ est étagée. Est-elle intégrable au sens du cours de L3 ? Est elle intégrable au sens de Riemann ?*

EXERCICE 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit A une partie de Ω. On note $\mathcal{A}_A$ la tribu induite sur A.

1. *Montrer que $(\Omega, \mathcal{A}_A)$ est un espace mesurable.*
2. *On suppose que $(A, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_1)$ et que $A \in \mathcal{A}$. Montrer que l'on peut définir "par restriction" une mesure sur A. Formellement on considère sur $(A, \mathcal{A}_A)$ la mesure ν définie par pour tout X de $\mathcal{A}_A$, $\nu(X) = \mu(X)$. Comparer les domaines de définitions de μ_1 et de ν. Montrer que $(A, \mathcal{A}_A, \nu)$ est un espace mesuré.*
3. *On considère $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \Omega\}$. On définit $\mathbb{P}$ par*

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0; \\ \mathbb{P}(\{1, 2, 3\} = 1/2; \\ \mathbb{P}(\{4, 5, 6\}) = 1/2; \\ \mathbb{P}(\Omega) = 1. \end{cases}$$

a) Montrer que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace mesuré.
b) On pose $A = \{1, 4\}$. Déterminer la tribu trace $\mathcal{A}_A$.
c) On pose $A = \{1, 4\}$. Montrer que l'on ne peut définir "par restriction" de mesure sur $(A, \mathcal{A}_A)$.

EXERCICE 4

On considère un espace quelconque Ω. On considère $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application telle que l'ensemble $f(\Omega)$ est au plus dénombrable. On va noter cet ensemble $\{b_i \mid i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$. On suppose dans cette écriture que si $i \neq j$, alors $b_i \neq b_j$. On pose ensuite $A_i = f^{-1}(\{b_i\})$. On note $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par f.

1. *Montrer que les ensembles A_i constituent une partition de Ω.*
2. *Montrer que chaque A_i est un élément de $\mathcal{A}$.*

En notant $\mathcal{C} = \{A_i \mid i \in I\}$, on notera $\mathcal{A}'$ la tribu engendrée par la partition de $(A_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire $\mathcal{A}' = \tau(\mathcal{C})$.

3. *Montrer que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.*
4. *Montrer que $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{R})$.*
5. *Conclure que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.*

EXERCICE 5

Soit $\Omega = \mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{A}$ des boréliens). On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note D l'ensemble des points de discontinuités de f et E son complémentaire. On note $\mathcal{B}_D$ (respectivement $\mathcal{B}_E$) la tribu trace de $\mathcal{A}$ sur D (respectivement sur E).

1. *Montrer que la fonction $f_{|E}$ (la restriction de f aux points de continuité) est mesurable $f_{|E} \in \mathcal{L}^0(E, \mathcal{B}_E, \mathbb{R})$.*
2. *On suppose que l'ensemble des points de discontinuité D est fini, montrer que la fonction $f_{|D}$ est mesurable. $f_{|D} \in \mathcal{L}^0(D, \mathcal{B}_D), \mathbb{R})$.*
3. *On suppose que D est dénombrable, $D = \{a_0, a_1, \ldots, \}$. Appliquer le lemme de recollement à la partition $(\{a_0\}, \{a_1\}, \ldots)$ de D pour montrer que $f_{|D} \in \mathcal{L}^0(D, \mathcal{B}_D, \mathbb{R})$.*
4. *On suppose que D est au plus dénombrable, montrer (à l'aide du lemme de recollement) que $f \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.*
5. *On considère une fonction monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que sait-on sur l'ensemble de ses points de discontinuités ? Que peux-t'on en déduire sur la mesurabilité de f ?*