Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne — L3 MIASHS
2023/24 — M. Gourdel

Intégration - Probabilités
TD 7

Par défaut, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sera un espace mesuré. On rappelle que l'intégrale d'une fonction étagée est particulièrement simple à calculer :

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{1}_{B_j} \Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(B_j).$$

Exercice 1

On considère une fonction positive mesurable à valeurs possiblement $+\infty$, $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ et trois ensembles mesurables $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$ et $C \in \mathcal{A}$.

1. *On suppose que, pour tout $x \in A$, $f(x) = +\infty$, et que $\mu(A) > 0$.*
   - *a) On considère pour tout n, la fonction $f_n = n\mathbf{1}_A$. Calculer $\int_A f_n(x)\, d\mu(x)$*
   - *b) Montrer à l'aide de la définition de l'intégrale que $\int_A f(x)\, d\mu(x) = +\infty$.*
   - *c) Montrer que $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = +\infty$.*
2. *On suppose que, pour tout $x \in B$, $f(x) = +\infty$, et que $\mu(B) = 0$.*
   - *a) On considère pour tout n, la fonction $g_n = n\mathbf{1}_B$. Calculer $\int_B g_n(x)\, d\mu(x)$*
   - *b) Montrer à l'aide de la définition de l'intégrale que $\int_B f(x)\, d\mu(x) = 0$.*
   - *c) Montrer que $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \int_{\Omega\setminus B} f(x)\, d\mu(x)$.*
3. *On suppose que $\mu(C) = 0$. Montrer que $\int_C f(x)\, d\mu(x) = 0$.*
4. *On suppose que $\mu(B) = 0$ et que $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Montrer que $\int_\Omega g(x)\, d\mu(x) = \int_{\Omega\setminus B} g(x)\, d\mu(x)$.*

Exercice 2

On considère une fonction positive intégrable, $h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$.

1. *En utilisant la définition de l'intégrale, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe une fonction étagée positive h_n telle que $h_n \leq h$ et telle que*

$$\int_\Omega h(x)\, d\mu(x) - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega h_n(x)\, d\mu(x) \leq \int_\Omega h(x)\, d\mu(x).$$

2. *Montrer en considérant $\varphi_n = \max(h_1, \ldots, h_n)$ qu'il existe une suite croissante ($\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$) de fonctions étagées positives φ_n telle que $\varphi_n \leq h$ et telle que*

$$\int_\Omega h(x)\, d\mu(x) - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega \varphi_n(x)\, d\mu(x) \leq \int_\Omega h(x)\, d\mu(x).$$

Exercice 3

Soit $a \in \Omega$ tel que $\{a\} \in \mathcal{A}$ et δ_a la mesure de Dirac en a. On considère $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \overline{\mathbb{R}}_+)$.

1. *Quels sont les atomes de δ_a ?*

2. *On considère $g = f\mathbf{1}_{\{a\}}$. Montrer que g est égale à f, δ_a presque partout et que g est étagée.*
3. *Calculer $\int_\Omega g\, d\delta_a$ puis en déduire que $\int_\Omega f\, d\delta_a = f(a)$.*

Exercice 4

On considère X une variable aléatoire $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $\mathbb{P}_X$ cette loi. On rappelle que $\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$. Calculer $\int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$.

On admet que

$$\int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}_X(x) = p \int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_1(x) + (1-p) \int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_0(x),$$

calculer $\int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}_X(x)$. Comparer et commenter.

Exercice 5

Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ une fonction mesurable positive. Soit μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On considère la fonction $\mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$\nu_f(A) = \int_A f\, d\mu. \tag{1}$$

1. *Montrer que si U, V sont des parties de Ω, $\mathbf{1}_U \mathbf{1}_V = \mathbf{1}_{U\cap V}$.*
2. *Justifier brièvement que la formule (1) a un sens (que la quantité existe bien au besoin dans $\overline{\mathbb{R}}$).*
3. *On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f = \mathbf{1}_{[-3,4]}$, déterminer ν_f.*
4. *On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $g = \mathbf{1}_{]-3,4[}$, déterminer ν_g. Montrer que $\nu_g = \nu_f$. Essayer de commenter.*
5. *On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un dé équilibré (probabilité uniforme) et $f(n) = n$, déterminer ν_f.*
6. *On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un dé équilibré (probabilité uniforme) et $g(1) = 0 = g(2) = g(3) = g(4)$ et $g(5) = 2$, $g(6) = 4$, déterminer ν_g.*
7. *On suppose que $f = \mathbf{1}_U$ pour un ensemble U dans $\mathcal{A}$. Montrer que ν_f est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$. A quelle condition cette mesure est-elle finie ? (respectivement respectivement une mesure de probabilité ?)*
8. *On considère ici le cas où f est une fonction positive étagée. Soit $A \in \mathcal{A}$. Calculer $\nu_f(A)$. Montrer (à l'aide de l'exercice 3 du TD3) que que ν_f est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$. A quelle condition cette mesure est-elle finie ? (respectivement une mesure de probabilité ?)*

Compléments

Exercice 6

On suppose qu'il existe deux mesures positives (μ_1, μ_2) définies sur $\mathcal{A}$ telles que $\mu = \mu_1 + \mu_2$. On considère une fonction positive mesurable, $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Le résultat principal de l'exercice est que si u est intégrable, alors $\int_\Omega u\, d(\mu_1 + \mu_2) = \int_\Omega u\, d\mu_1 + \int_\Omega u\, d\mu_2$.

1. *Soit φ une fonction étagée positive telle que $\varphi \leq f$, montrer que*

$$\int_\Omega \varphi(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega \varphi(x)\,d(\mu_1+\mu_2)(x) = \int_\Omega \varphi(x)\,d\mu_1(x) + \int_\Omega \varphi(x)\,d\mu_2(x)$$

   En déduire que

$$\int_\Omega \varphi(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega \varphi(x)\,d(\mu_1+\mu_2)(x) \leq \int_\Omega f(x)\,d\mu_1(x) + \int_\Omega f(x)\,d\mu_2(x)$$

   puis que

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega f(x)\,d(\mu_1+\mu_2)(x) \leq \int_\Omega f(x)\,d\mu_1(x) + \int_\Omega f(x)\,d\mu_2(x)$$

2. *Montrer que si $f \notin \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$, alors*

$$\int_\Omega f(x)\,d(\mu_1+\mu_2)(x) = \int_\Omega f(x)\,d\mu_1(x) + \int_\Omega f(x)\,d\mu_2(x)$$

3. *On suppose que $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$,*

   a) Montrer que pour $i \in \{1,2\}$, il existe une fonction étagée étagée positive f_n^i telle que $f_n^i \leq f$ et telle que

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu_i(x) - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega f_n^i(x)\,d\mu_i(x) \leq \int_\Omega f(x)\,d\mu_i(x).$$

   b) Montrer que la fonction $f_n := \max(f_n^1, f_n^2)$ est une fonction étagée. En déduire que

$$\int_\Omega f(x)\,d(\mu_1+\mu_2)(x) \geq \int_\Omega f(x)\,d\mu_1(x) + \int_\Omega f(x)\,d\mu_2(x)$$

4. *On suppose que $u \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ (signe quelconque). Montrer*

$$\int_\Omega u(x)\,d(\mu_1+\mu_2)(x) = \int_\Omega u(x)\,d\mu_1(x) + \int_\Omega u(x)\,d\mu_2(x)$$