Université Paris 1 - Magistère d'Economie

Optimisation – Corrigé de l'interrogation de Mars 2023

Exercice 1

Soit α un paramètre > 0 . On considère le domaine

$$K(\alpha)=\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y\leq\alpha \ , \ x\geq 0 \ \ et \ \ y\geq 0\}$$

a) Représenter le domaine $K(\alpha)$. Est-il convexe ?

b) Représenter les cônes normaux aux différents points du domaine

Soient maintenant p et q deux paramètres **strictement positifs** supplémentaires.

On considère le programme $(P)\begin{cases} Max_{x,y} \quad px+qy \\ (x\,,y)\in K(\alpha)\end{cases}$

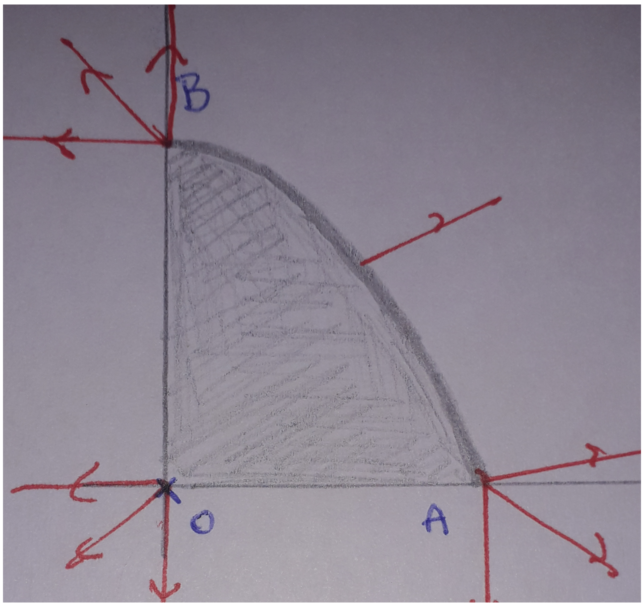
c) Montrer que la contrainte $x^2+y\leq\alpha$ est saturée à l'optimum

d) En supposant $y>0$ à l'optimum, résoudre et donner la condition sur les paramètres correspondante

e) En supposant $y=0$ à l'optimum, résoudre et donner la condition sur les paramètres correspondante

Corrigé :

a)



La fonction $g(x\,,y):(x\,,y)\rightarrow x^2+y-\alpha$ est convexe comme "somme directe" des fonctions convexes $x\rightarrow x^2$ et $y\rightarrow y-\alpha$, les deux autres contraintes sont affines, donc le domaine est convexe.

b) Les cônes normaux sont en rouge sur la figure.

c) En tout point du domaine le gradient de la fonction objectif $\nabla f(x\,,y)=\binom{p}{q}$ pointe strictement vers le "Nord-Est" puisque p et q sont strictement positif. On voit donc sur la figure que la condition du premier ordre $\nabla f(x\,,y)\in N_{(x\,,y)}K$ ne peut être réalisée qu'en saturant la contrainte $x^2+y\leq\alpha$, on voit aussi que le point B n'est jamais solution.

(on peut aussi, sans parler de la condition du premier ordre, évoquer la monotonie stricte de la fonction objectif par rapport à x ou par rapport à y , pour conclure à la saturation de la contrainte, mais cet argument ne permet pas d'exclure le point B)

d) Si $y>0$, et comme aussi forcément $x>0$ comme on l'a vu (le point B n'est jamais solution), seule la contrainte $x^2+y\leq\alpha$ est saturée et donc le cône normal en (x , y) s'écrit $N_{(x,y)}K=\mathbb{R}_+\binom{2x}{1}$, la condition du premier ordre $\nabla f(x,y)\in N_{(x,y)}K$ donne donc

$$\exists\lambda\geq 0/\quad \begin{cases} p=2\lambda x \\ q=\lambda \end{cases}$$

D'où $x=\dfrac{p}{2q}$ et $y=\alpha-\dfrac{p^2}{4q^2}$ puisque $x^2+y=\alpha$.

Et il faut $y>0$, la condition sur les paramètres est donc $\alpha>\dfrac{p^2}{4q^2}$.

e) Si $y=0$, $x=\sqrt{\alpha}$ puisque $x^2+y=\alpha$ et la condition sur les paramètres doit être la condition complémentaire de celle trouvée précédemment, i.e. $\alpha\leq\dfrac{p^2}{4q^2}$ puisque le programme a une solution unique caractérisée par la CN1 (programme "strictement" convexe). Vérifions-le :

Le cône normal en $(\sqrt{\alpha},0)$ s'écrit $N_{(\sqrt{\alpha},0)}K=\mathbb{R}_+\binom{2\sqrt{\alpha}}{1}+\mathbb{R}_+\binom{0}{-1}$, la condition du premier ordre $\nabla f(x,y)\in N_{(x,y)}K$ donne donc

$$\exists\lambda,\mu\geq 0/\quad \begin{cases} p=2\lambda\sqrt{\alpha} & (1) \\ q=\lambda-\mu & (2) \end{cases}$$

(1) donne alors $\lambda=\dfrac{p}{2\sqrt{\alpha}}$, puis (2) donne $\mu=\dfrac{p}{2\sqrt{\alpha}}-q$. La condition $\mu\geq 0$ équivaut alors à $\alpha\leq\dfrac{p^2}{4q^2}$. //

Exercice 2

Soit a un paramètre strictement positif

On considère le programme (P(a)) $\begin{cases} Min\ \ x^2+(y-a)^2 \\ (x-1)^2+y^2\leq 1 \end{cases}$

a) Représenter le domaine

b) Montrer que la solution optimale n'est jamais intérieure

c) Donner l'expression d'un vecteur dirigeant le cône normal en un point (x,y) de la frontière du domaine

d) Calculer les coordonnées de la solution optimale

e) Que se passe t-il quand a tend vers $+\infty$? Ce résultat était-il prévisible ?

Corrigé :

a) Il s'agit du disque fermé de centre (1 , 0) et de rayon 1 . Noter qu'il est tangent au point (0 , 0) à la droite x = 0 .

(figure)

b) Si X = (x , y) est solution intérieure, on doit avoir $\nabla f(x,y)=0$, i.e. $\begin{cases} 2x & = 0 \\ 2(y-a) & = 0 \end{cases}$, qui équivaut à X = (0 , a) . Mais en ce point $(x-1)^2+y^2=1+a^2>1$ et donc (0 , a) n'est pas dans le domaine. La SO n'est donc pas intérieure.

c) Les points de la frontière du domaine sont les points qui saturent l'unique contrainte $g(x,y)=(x-1)^2+y^2\leq 1$. Le gradient de cette contrainte est $\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}$ et il ne s'annule qu'au point (1 , 0) qui n'est pas dans la frontière de K , donc la contrainte est qualifiée et en un point X de la fontière de K on a $N_X K=\mathbb{R}_+\nabla g(X)=\{\begin{pmatrix} 2\lambda(x-1) \\ 2\lambda y \end{pmatrix}/\lambda\geq 0\}$.

d) La condition nécessaire du premier ordre est $\nabla(-f(X))\in N_X K$, i.e.

$$(S)\quad \begin{cases} -2x & =2\lambda(x-1) \\ -2(y-a) & =2\lambda y \\ \lambda & \geq 0 \end{cases} .$$

Le plus simple ici pour éliminer λ est d'écrire que le déterminant des vecteurs $\begin{pmatrix} -2x \\ -2(y-a) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}$ est nul, i.e. $xy-(y-a)(x-1)=0$, soit $ax+y=a$. D'où, en reportant $y=a(1-x)$ dans la contrainte $(x-1)^2+y^2=1$, on obtient

$$(x-1)^2=\frac{1}{1+a^2} .$$

On a donc apparemment deux candidats, mais en fait l'un des deux doit pouvoir être éliminé puisque le programme est "strictement" convexe, et donc le système (S) doit caractériser l'unique solution optimale.

En revenant à la première équation du système, et compte tenu de $\lambda\geq 0$, on se rend compte que, si $x>1$, alors $2\lambda(x-1)\geq 0$ et donc $-2x\geq 0$, ce qui est absurde.

La solution optimale est donc

$$X^*(a)=(1-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}) .$$

e) Quand a tend vers $+\infty$, la solution optimale $X^*(a)$ tend vers le point $(1,1)$.

Cela n'est pas étonnant si on comprend la nature géométrique du problème : (P(a)) consiste à trouver le point du disque K le plus proche d'un point courant (0 , a) sur la droite x = 0 , ou autrement dit, à projeter orthogonalement le point (0 , a) sur le disque. Quand a part à l'infini au "Nord" on s'attend bien à voir la solution converger vers le point le plus au "Nord" du domaine.