Université Paris I - Panthéon - Sorbonne

Magistère d'économie

Correction de l'exercice 8

Exercice 8. Soit K la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

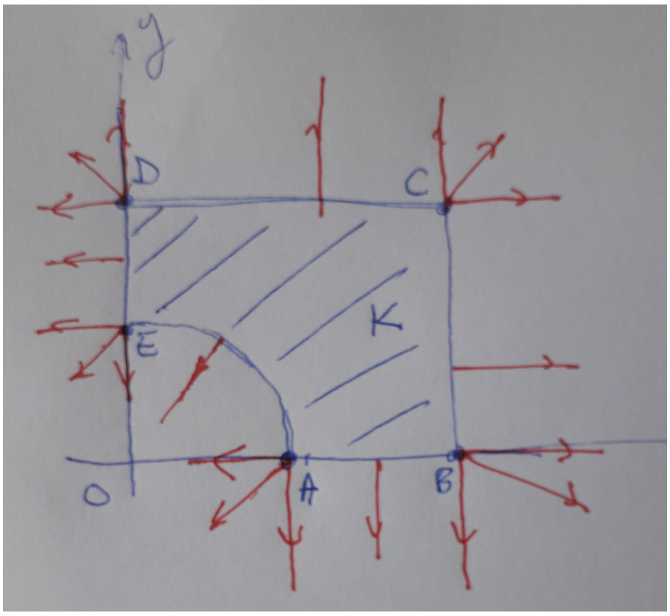
$$\text{et } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to x^2 - x + y^2$$

a) Représenter le domaine K

b) Trouver les maxima et minima de f sur K (on pourra procéder géométriquement)

Correction :

a) Le domaine est borné et fermé (inégalités larges), mais il n'est pas convexe. Sur la figure les cônes normaux sont représentés en rouge



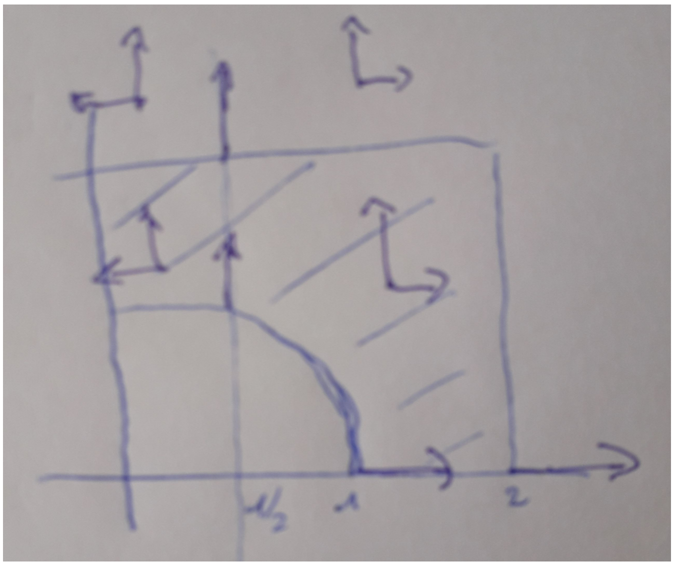
b) Le vecteur gradient en un point (x,y) vaut $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 2y \end{pmatrix}$

On voit que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est toujours strictement positif sur le domaine, sauf quand y est nul. Quant à $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ il est du signe de $x - 1/2$.

La figure suivante (très moche) représente les directions possibles du gradient.

A droite de $x = 1/2$ et au dessus de $y = 0$, le gradient est orienté strictement vers le "Nord-Est", tandis qu'à gauche de $x = 1/2$ et au dessus de $y = 0$, le gradient est orienté strictement vers le "Nord-Ouest".

Noter que le gradient est horizontal quand $y = 0$, et vertical quand $x = 1/2$.



La condition du premier ordre pour un max est $\nabla f(X^*) \in N_{X^*}K$,
et pour un min $-\nabla f(X^*) \in N_{X^*}K$

Il n'existe pas de solution intérieure puisque le point (1/2,0) qui annule le gradient est en dehors du domaine. Les points candidats sont donc à chercher sur la frontière de K .

i) Recherche des maxima :
En superposant les deux figures précédentes, on voit qu'il y a exactement quatre points que satisfont la CN1 : B = (2,0) , C = (2,2) , D = (0,2) et M = (1/2,2)
En comparant les valeurs de f en ces points, on trouve que C = (2,2) est l'unique solution pour un maximum.

ii) Recherche des minima :
En inversant le sens des flèches sur la deuxième figure, puis en superposant avec la première, on voit que pour seuls candidats au min on a le point A = (1,0) et peut-être des points sur l'arc de cercle entre A et le point N d'abscisse 1/2.

Cherchons s'il existe un point sur l'arc de cercle : en un point X = (x,y) qui ne sature que la contrainte quadratique $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \leq 0$, le gradient de la contrainte $\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$ ne s'annule pas et par conséquent $N_X K = \mathbb{R}_+ \nabla g(X) = \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$
La CN1 $-\nabla f(X) \in N_X K$ s'écrit donc $\exists \lambda \geq 0 / \begin{pmatrix} -2x+1 \\ -2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$
Deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont proportionnels ssi leur déterminant est nul, par conséquent
$Det \begin{pmatrix} -2x+1 & -2x \\ -2y & -2y \end{pmatrix} = -2y = 0$, on retombe sur le point A qui sature deux contraintes.
Seul le point A est candidat pour un min, c'est donc la solution.

Remarque 1 : l'existence de max et min est assurée par le théorème de Weierstrass puisque le domaine est fermé et borné.
Remarque 2 : la fonction objectif peut s'écrire $f(x,y)=(x-1/2)^2+y^2-1/4$. Les courbes de niveau sont donc les cercles de centre (1/2,0) et le problème posé par l'exercice est en fait de trouver les points de K les plus proches (min) et les plus éloignés (max) de (1/2,0). On voit ainsi tout de suite les solutions... //