Université Paris I - Panthéon - Sorbonne

Magistère d'économie

Correction de l'exercice 9

Exercice 9. On considère le programme dans $\mathbb{R}^2$

$$(P)\begin{cases} Max \quad f(x,y)=12x-2x^2+2y-y^2 \\ 2x+y\leq 3 \\ x+2y\leq 3 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}.$$

a) Représenter le domaine.

b) Montrer que (P) admet une solution optimale. S'agit-il d'un programme convexe ?

c) Tracer les droites d'équation $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ et en déduire une partition du plan en 4 régions correspondant à différentes directions du gradient de f

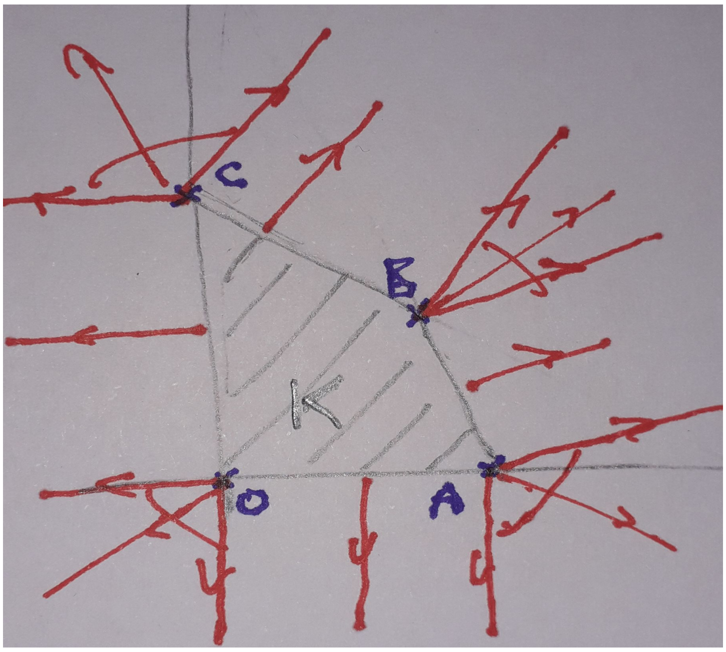
d) Représenter les cônes normaux aux différents points du domaine

e) Déduire de ce qui précède que la contrainte $2x + y \leq 3$ est saturée à l'optimum et que le point $(1 , 1)$ n'est pas solution.

f) Déterminer les coordonnées de la solution optimale

Correction :

a) On trace facilement la figure suivante



Les quatre points qui saturent deux contraintes sont O = (0,0), A = (3/2,0), B = (1,1) et C = (0,3/2). Les cônes normaux sont représentés en rouge.

b) Le domaine est borné et fermé (inégalités larges), la fonction objectif est continue, le théorème de Weierstrass affirme alors qu'il existe au moins une solution optimale.

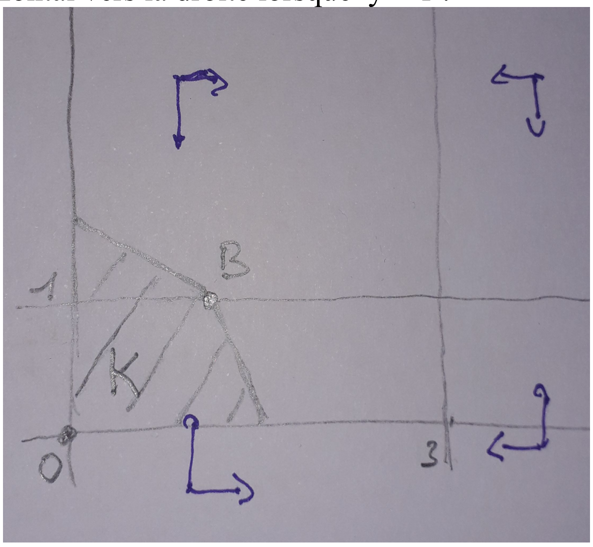
Le domaine est convexe puique toutes les contraintes sont affines. La fonction objectif est concave, et même strictement concave, comme "somme directe" des fonctions strictement concaves $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to 12x - 2x^2$ et $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \to 2y - y^2$.

(autre méthode pour montrer que f est strictement concave : regarder la matrice Hessienne, ici diagonale à termes diagonaux strictement négatifs partout dans K, donc à valeurs propres strictement négatives partout dans K).

Le programme est donc bien convexe.

c) Les droites d'équation $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sont respectivement x = 3 et y = 1 , ces deux droites divisent le plan en quatre régions, mais le domaine n'en rencontre que deux.

Dans le domaine, le gradient de f pointe vers le "Nord-Est" lorsque y < 1 , vers le "Sud-Est" lorsque y > 1 et est horizontal vers la droite lorsque y = 1 .



d) Sur la première figure les cônes normaux sont représentés en rouge

e) En superposant les deux figures précédentes, on voit que les seuls points où la CN1 $\nabla f(X^*) \in N_{X^*} K$ peut être vérifée sont les points du segment [A B], c'est à dire les points saturant la contrainte $2x + y \leq 3$.

En fait le point B = (1,1) doit être éliminé aussi car, en ce point, le gradient de la fonction objectif est horizontal et donc n'est pas dans le cône normal du point B.

Ceci devrait être évident géométriquement.

Vérifions-le formellement, en guise de question supplémentaire : les gradients des contraintes saturées en B $\begin{cases} 2x + y - 3 \leq 0 \\ x + 2y - 3 \leq 0 \end{cases}$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ils forment une famille libre, le cône normal en B est donc le cône engendré par ces gradients :

$$N_B K = \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} / \lambda \geq 0, \mu \geq 0 \right\}$$

Maintenant, si la deuxième coordonnée $\lambda+2\mu$ d'un vecteur du cône normal $\begin{pmatrix}2\lambda+\mu\\ \lambda+2\mu\end{pmatrix}$ est nulle, on a forcément $\lambda=\mu=0$ compte tenu de $\lambda\geq 0,\mu\geq 0$, le vecteur est donc égal au vecteur nul. Par conséquent $\nabla f(B)=\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ ne peut pas appartenir à $N_B K$.

f) On a comme candidats le point A qui sature deux contraintes, et les points du segment ouvert]A,B[qui saturent une seule contrainte.

f)i) Regardons le point A : On a $\nabla f(A)=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$, ce vecteur, parallèle à $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, est sur une figure "à droite" du vecteur $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ qui dirige la normale sortante du segment [A,B] au point A , on voit donc très clairement sur la figure que $\nabla f(A)=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ est dans $N_A K$.

Vérifions-le tout de même, ici encore en guise de question supplémentaire : les gradients des contraintes saturées en A $\begin{cases}2x+y-3\leq 0\\ -y\leq 0\end{cases}$ sont $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, ils forment une famille libre, le cône normal en A est donc le cône engendré par ces gradients :

$$N_A K = \mathbb{R}_+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}_+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\left\{\lambda\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}/\lambda\geq 0,\mu\geq 0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}2\lambda\\ \lambda-\mu\end{pmatrix}/\lambda\geq 0,\mu\geq 0\right\}$$

La CN1 au point A $\nabla f(A)\in N_A K$ s'écrit donc :

$\begin{cases}6 = 2\lambda\\ 2 = \lambda-\mu\end{cases}$, avec $\lambda\geq 0,\mu\geq 0$. Ce système a bien une solution : $\lambda=3,\mu=1$.

La CN1 est vérifiée au point A .

On peut même affirmer que A est solution optimale car le programme est convexe et donc la CN1 est aussi condition suffisante.

f)ii) Cherchons si un point X = (x,y) du segment]A,B[peut vérifier la CN1 $\nabla f(X)\in N_X K$

La contrainte saturée est $2x + y - 3 \leq 0$, le cône normal est

$$N_X K = \mathbb{R}_+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}2\lambda\\ \lambda\end{pmatrix}/\lambda\geq 0\right\} ,$$

on doit donc résoudre $\begin{cases}12-4x = 2\lambda & (1)\\ 2-2y = \lambda & (2)\\ 2x+y = 3 & (3)\end{cases}$ avec $\lambda\geq 0$.

On élimine facilement λ entre (1) et (2) et on est conduit au système

$\begin{cases}x-y = 2\\ 2x+y = 3\end{cases}$, qui a pour solution (x,y) = (5/3,-1/3) , le λ associé est bien positif ou nul mais le point lui-même n'est pas sur le segment]A,B[, et n'est même pas dans le domaine.

On n'a donc pas de SO sur]A,B[.

Conclusion : A = (3/2,0) est l'unique solution optimale. //