Université Paris I - Panthéon - Sorbonne

Magistère d'économie

Optimisation - Exercices

Exercice 1. Soit les programmes

$$(P_1)\begin{cases} Max\, f_1(x_1) \\ x_1 \in K_1 \end{cases} \quad (P_2)\begin{cases} Max\, f_2(x_2) \\ x_2 \in K_2 \end{cases} \quad (P)\begin{cases} Max\, f_1(x_1)+f_2(x_2) \\ x_1 \in K_1,\, x_2 \in K_2 \end{cases}$$

Montrer que SO(P) = SO(P_1)XSO(P_2)

Exercice 2. Soit a et b deux paramètres réels tels que a < b

Résoudre le programme $(P)\begin{cases} Min\ \ x^2+y^2 \\ x+y^2=b \\ x \geq a \end{cases}$

Exercice 3. Trouver les maxima et les minima (éventuels) des fonctions suivantes

1. $f(x_1,\ldots,x_n)=(\sum_{i=1}^{n} x_i)\exp(\sum_{i=1}^{n} x_i)$ sur $\mathbb{R}^n$
2. $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i)$ sur $\mathbb{R}^n_{++}$
3. $f(x_1,\ldots,x_n)=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ sur $K=\{(x_1,\ldots,x_n)/\forall i,\, x_i \geq 0$ et $\sum x_i \leq 1\}$

où $\forall i,\, \alpha_i > 0$

Indication : on pourra montrer que la recherche des maxima revient à résoudre le programme

$$(P)\begin{cases} Max\, x_1^{\alpha_1}\ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\cdot(1-\sum_{i=1}^{n-1} x_i)^{\alpha_n} \\ \forall i,\, x_i > 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i < 1 \end{cases}$$

4. Même fonction objectif que ci-dessus mais maintenant sur le domaine

$K'=\{(x_1,\ldots,x_n)/\forall i,\, x_i \geq 0$ et $\sum p_i x_i \leq R\}$, où $\forall i,\, p_i > 0$ et $R > 0$

(on pourra poser $\forall i,\, y_i=\dfrac{p_i x_i}{R}$)

Exercice 4. Soit le programme

$$(P)\begin{cases} Max\, f(x_1,\ldots,x_n) \\ \forall i,\, x_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R \end{cases}$$

où $f(x_1,\ldots,x_n)=Min\{\dfrac{x_1}{a_1},\ldots,\dfrac{x_n}{a_n}\}$ et $a_1,\ldots,a_n,\, p_1,\ldots,p_n,\, R$ sont des paramètres >0

a) On pose n = 2, a_1 = 1, a_2 = 2 . Déterminer et tracer les courbes de niveau de la fonction objectif f

b) Montrer que (P) admet une SO et établir qu'à l'optimum on a nécessairement

$$\frac{x_1}{a_1} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}$$

c) En déduire la solution optimale de (P)

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne, on considère

- la boule $B = \{ (x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$
- le plan $H = \{ (x, y, z) / x - z = 0 \}$
- le point A de coordonnées $A = (a, 0, 0)$, $a \in \mathbb{R}$

On veut calculer le carré de la distance du point A au disque $B \cap H$

a) Ecrire le problème sous forme d'un programme d'optimisation. Montrer que ce programme admet une solution

b) Vérifier que si (x, y, z) est réalisable alors le point $(x, 0, z)$ l'est également et améliore la fonction objectif. En déduire qu'à l'optimum on a nécessairement $y = 0$

c) Représenter la situation dans le plan $y = 0$. Résoudre géométriquement en discutant selon la valeur du paramètre a

d) En exploitant les relations $x = z$ et $y = 0$, transformer le problème du a) en un programme à une seule variable. Résoudre ce programme et retrouver ainsi les résultats du c)

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en un point x^*

Pour tout v tel que $\|v\| = 1$, on note $Df(x^*, v) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t}$

a) Montrer que cette quantité est bien définie et la calculer en fonction de $\nabla f(x^*)$ et v. Interpréter cette quantité

b) On suppose $\nabla f(x^*) \neq 0$. Pour quel v, $Df(x^*, v)$ est-il maximal ?

Exercice 7. Résoudre le problème suivant (on pourra procéder géométriquement)

$$(P) \begin{cases} Max \quad -4x_1^2 - 5x_2^2 + 6x_1x_2 - 25x_1 + 40x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ 8x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 8. Soit K la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \}$$

$$\text{et } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to x^2 - x + y^2$$

a) Représenter le domaine K

b) Trouver les maxima et minima de f sur K (on pourra procéder géométriquement)

Exercice 9. On considère le programme dans $\mathbb{R}^2$

$$(P)\begin{cases} Max \quad f(x,y)=12x-2x^2+2y-y^2 \\ 2x+y\leq 3 \\ x+2y\leq 3 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}.$$

a) Représenter le domaine.
b) Montrer que (P) admet une solution optimale. S'agit-il d'un programme convexe ?
c) Tracer les droites d'équation $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ et en déduire une partition du plan en 4 régions correspondant à différentes directions du gradient de f
d) Représenter les cônes normaux aux différents points du domaine
e) Déduire de ce qui précède que la contrainte $2x + y \leq 3$ est saturée à l'optimum et que le point $(1 , 1)$ n'est pas solution.
f) Déterminer les coordonnées de la solution optimale

Exercice 10. Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, (x,y)\to -x^2+xy+2x-2y$

a) Tracer un diagramme représentant les directions du gradient de la fonction f suivant les différentes régions du plan.

Soit α un paramètre > 0 , on considère maintenant le domaine

$$D_\alpha=\{(x,y)/x\geq 0, y\geq 0 \text{ et } x+y\leq\alpha\} \text{ et le programme } (P_\alpha)\begin{cases} Max \quad f \\ D_\alpha \end{cases}$$

b) On suppose $\alpha<1$, résoudre géométriquement le programme.
c) On suppose $1\leq\alpha<2$, résoudre géométriquement le programme.
d) Donner de même $\mathrm{SO}(P_\alpha)$ lorsque $2\leq\alpha<4$
e) On suppose $4\leq\alpha$. Déterminer les points vérifiant la CN1 géométrique.
f) Toujours dans le cas $4\leq\alpha$, comparer la valeur de la fonction objectif aux points candidats selon la valeur du paramètre α et conclure

(pour simplifier les calculs on pourra noter que f(x , y) = (2 - x)(x - y))

Exercice 11. On considère le programme dans $\mathbb{R}^2$

$$(P)\begin{cases} Max \quad f(x,y)=-2x^2-2y^2+3xy+7x \\ -3x+y^2\leq 0 \\ 3x+4y\leq 12 \\ y\geq 0 \end{cases}.$$

a) Représenter le domaine
b) Montrer que (P) admet une solution optimale unique

c) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kühn et Tücker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? Suffisantes ?

d) Montrer que la SO n'est pas un point intérieur

e) Tracer les droites d'équation $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ et en déduire une partition du plan en 4 régions correspondant à différentes directions du gradient de f

f) Déduire de ce qui précède que seule la contrainte $3x + 4y \leq 12$ est saturée à l'optimum

g) Déterminer les coordonnées de la solution optimale

Exercice 12. Soit n un entier ≥ 1, trouver les solutions du problème suivant

$$(P)\begin{cases} Min \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \\ \forall i, x_i > 0 \end{cases}$$

Exercice 13. Soit n un entier ≥ 1 et soit $R > 0$. On considère le programme dans $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(P)\begin{cases} Max \quad \sum_{i=1}^{n} (-x_i^3 + 4x_i) + y \\ \sum_{i=1}^{n} x_i + y \leq R \\ \forall i, x_i \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que (P) admet une solution optimale

b) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kühn et Tücker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? suffisantes ? (justifier vos réponses)

c) Montrer que la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i + y \leq R$ est toujours saturée à l'optimum

d) Résoudre le programme (on pourra chercher à établir, à partir des conditions de Kühn et Tücker, que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ à l'optimum). On présentera les résultats en discutant sur la valeur des paramètres n et R

Exercice 14. Soit le programme dans $\mathbb{R}^2$ paramétré par $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(Q)\begin{cases} Min \quad (x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 \\ xy \leq 1 \end{cases}$$

a) Représenter le domaine de (Q)

b) Montrer que (Q) admet une solution optimale

c) Montrer que (Q) est qualifié. Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kühn et Tücker (on notera λ le multiplicateur)

d) Résoudre le système de Kühn et Tücker en envisageant successivement les cas :
di) $\lambda = 0$ dii) $\lambda = 2$ diii) $\lambda \notin \{0, 2$

e) Conclure : donner SO(Q) en fonction de α

Exercice 15. Soit n un entier ≥ 1 . On considère le programme dans $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(P)\begin{cases} Max \quad \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) + y \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + y \leq R \\ \forall i, x_i \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

où $p_1, \ldots, p_n$, R sont des paramètres strictement positifs

a) S'agit-il d'un programme convexe ?

b) Le programme est-il qualifié ?

c) Ecrire le Lagrangien de (P) et les conditions de Kühn et Tücker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? suffisantes ? (justifier)

d) En supposant $y > 0$ à l'optimum, résoudre le programme (P). Quelle condition doit-être alors vérifiée par les paramètres ?

e) En supposant $y = 0$ à l'optimum, résoudre le programme (P). Donner la condition nécessaire sur les paramètres correspondante

f) Conclure

Exercice 16. Soit le programme

$$(P)\begin{cases} Max \quad x_1 x_2 - x_1 - x_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

où p_1, p_2 sont des paramètres strictement positifs

a) Montrer que (P) admet toujours au moins une solution optimale. S'agit-il d'un programme convexe ?

b) Dessiner une figure indiquant les directions possibles du gradient de la fonction objectif suivant les différentes régions du plan

c) En déduire SO(P) lorsque $p_1 + p_2 \geq 1$

d) On suppose dorénavant $p_1 + p_2 < 1$, déterminer les points vérifiant la condition géométrique d'optimalité

e) Comparer la valeur de la fonction objectif aux différents points candidats et en déduire SO(P) suivant la valeur des paramètres p_1 , p_2