

Université Paris 1 - Magistère d'Economie
Optimisation – Mai 2023

Exercice 1

Soit δ un paramètre > 0 . On considère le programme

$$(P) \begin{cases} \text{Max} & f(x, y) = \sqrt{x} + \delta \sqrt{y+1} \\ & x+y \leq 1 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

- a) S'agit-il d'un programme convexe ?
- b) Montrer qu'à l'optimum on a toujours $x^* > 0$ (raisonner par l'absurde : si $x^* = 0$ construire un point réalisable (x', y') tel que $x' > 0$ qui améliore la fonction objectif)
- c) Ecrire le Lagrangien de (P) et les conditions de Kuhn et Tucker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? suffisantes ? (justifier)
- d) En supposant $y^* > 0$ à l'optimum, résoudre le programme (P). Quelle condition doit-elle être alors vérifiée par δ ?
- e) En supposant $y^* = 0$ à l'optimum, résoudre le programme (P). Donner la condition nécessaire sur δ correspondante

Exercice 2

Soit a, b, p, q, R des paramètres strictement positifs, on considère le programme

$$(P) \begin{cases} \text{Max} & \ln(x+a) + \ln(y+b) \\ & px + qy \leq R \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

- a) S'agit-il d'un programme convexe ?
- b) Montrer par un argument simple que la contrainte $px + qy \leq R$ est saturée à l'optimum
- c) Ecrire le Lagrangien de (P) et les conditions de Kuhn et Tucker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? suffisantes ? (justifier)
- d) En supposant $x > 0$ et $y > 0$ à l'optimum, résoudre le programme (P). Quelles conditions doivent être alors vérifiées par les paramètres ?
- e) En supposant $x = 0$ à l'optimum, résoudre le programme (P). Donner la condition nécessaire sur les paramètres correspondante
- f) En supposant $y = 0$ à l'optimum, résoudre le programme (P). Donner la condition nécessaire sur les paramètres correspondante
- g) On suppose maintenant $a = p = q = 1$, $b = 2$, donner la solution optimale en fonction de R et tracer la courbe décrite par ces points