Université Paris 1 - Magistère d'Economie
Optimisation – Mai 2022

Exercice 1

On considère le programme dans R^2 : (P) $\begin{cases} Max \ -x^2+2x-2y^2+4y \\ x+y\leq 2 \\ 3x+y\leq 3 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

a) Représenter le domaine.

b) Sur une figure différente, tracer les droites d'équations $f'_x = 0$ et $f'_y = 0$ et en déduire une partition du plan en quatre régions correspondant à différentes directions possibles du gradient de f.

c) Sur une troisième figure, représenter les cônes normaux aux différents points du domaine;

d) Déduire de ce qui précède que seule la contrainte $3x + y \leq 3$ est saturée à l'optimum.

e) Déterminer les coordonnées de la solution optimale.

Exercice 2

Soit n un entier ≥ 1 . On considère le programme suivant dans $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(P)\begin{cases} Max \quad \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} + y \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + y \leq R \\ \forall\, i, x_i \geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

où $p_1 , \dots , p_n$, R sont des paramètres strictement positifs

a) S'agit-il d'un programme convexe ?

b) Montrer par un argument simple que la contrainte $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + y \leq R$ est saturée à l'optimum

On admettra dans la suite que les contraintes $x_i \geq 0$ ne sont jamais saturées à l'optimum

c) Le programme est-il qualifié ?

d) Ecrire le Lagrangien de (P) et les conditions de Kühn et Tücker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? suffisantes ? (justifier)

e) En supposant $y > 0$ à l'optimum, résoudre le programme (P). Quelle condition doit-être alors vérifiée par les paramètres ?

f) En supposant $y = 0$ à l'optimum, résoudre le programme (P). Donner la condition nécessaire sur les paramètres correspondante

g) On suppose $n = 1$ et $p = 1$, donner la solution optimale en fonction de R et tracer l'ensemble des points obtenus dans le plan quand R varie