Université Paris 1 - Magistère d'Economie

Optimisation – Epreuve supplémentaire Mai 2020

Exercice 1.

Soit α un paramètre > 0 . On considère le domaine

$$K(\alpha)=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ / \ x+y^2\leq\alpha \ , \ x\geq 0 \ \ et \ \ y\geq 0\}$$

a) Représenter le domaine $K(\alpha)$. Est-il compact ? Convexe ?

b) Représenter les cônes normaux aux différents points du domaine

c) Montrer que le domaine $K(\alpha)$ est qualifié

Soit maintenant p et q deux paramètres strictement positifs supplémentaires.

On considère le programme $(P)\begin{cases} Max_{x,y} \quad px+qy \\ (x,y)\in K(\alpha)\end{cases}$

d) Montrer que (P) admet une solution optimale

e) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kühn et Tücker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? suffisantes ?

f) Montrer que la contrainte $x+y^2\geq\alpha$ est saturée à l'optimum

g) Résoudre (P) en discutant sur la valeur des paramètres.

h) On suppose maintenant p = q = 1 , donner la solution optimale en fonction de α et tracer la courbe décrite par ces points

i) Représenter la situation à l'optimum (courbe de niveau, gradient, cône normal) lorsque p = q = 1 dans les deux cas $\alpha=1$ et $\alpha=\frac{1}{9}$

Exercice 2.

On considère le programme

$$(P)\begin{cases} Max \quad f(x,y)=12x-x^2+20y-2y^2 \\ (x-10)^2+y^2\leq 100 \\ x+y \ \leq \ 10 \\ y\geq 0\end{cases}$$

a) Montrer que la solution de (P) existe

b) S'agit-il d'un programme convexe ?

c) Représenter le domaine et les cônes normaux

d) Tracer les droites d'équation $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ et en déduire une partition du plan en quatre régions correspondant à différentes directions du gradient de f

e) Déduire de la question précédente que seule la contrainte $x+y \ \leq \ 10$ est saturée à l'optimum

f) Déterminer les coordonnées de la solution optimale