Université Paris 1 - Magistère d'Economie

Optimisation – Mai 2019

Durée : 2h

Exercice 1

Soit α un paramètre > 0 . On considère le domaine

$$K(\alpha)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y\leq\alpha \ , \ x\geq0 \ \ et \ \ y\geq0\}$$

a) Représenter le domaine $K(\alpha)$. Est-il convexe ?

b) Représenter les cônes normaux aux différents points du domaine

c) Montrer que le domaine $K(\alpha)$ est qualifié

Soient maintenant p et q deux paramètres **strictement positifs** supplémentaires.

On considère le programme $(P)\begin{cases} Max_{x,y} \quad px+qy \\ (x,y)\in K(\alpha) \end{cases}$

d) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kühn et Tücker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? suffisantes ?

e) Montrer que la contrainte $x^2+y\leq\alpha$ est saturée à l'optimum

f) Montrer que la contrainte $x\geq0$ n'est jamais saturée à l'optimum

g) En supposant $y>0$ à l'optimum, résoudre et donner la condition sur les paramètres correspondante

h) En supposant $y=0$ à l'optimum, résoudre et donner la condition sur les paramètres correspondante

Exercice 2

Soit a un paramètre réel

On considère le programme (P(a)) $\begin{cases} Min \ \ x^2+(y-a)^2 \\ (x-1)^2+y^2\leq4 \end{cases}$

a) Montrer, sans résoudre le programme, que

$$(x^*,y^*) \in SO(P(a)) \Leftrightarrow (x^*,-y^*) \in SO(P(-a))$$

b) Représenter le domaine

c) S'agit-il d'un programme convexe?

d) Montrer que le programme est qualifié

e) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kühn et Tücker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? suffisantes ?

f) On suppose la solution intérieure, quelle est alors sa valeur et quelle condition doit être vérifiée par le paramètre a ?

g) On suppose la contrainte saturée à l'optimum, calculer les coordonnées de la solution optimale

h) Que se passe t-il quand a tend vers $+\infty$? Ce résultat était-il prévisible ? (on pourra dessiner quelques courbes de niveau)