Université Paris 1 - Magistère d'Economie
Corrigé Exercice 2, Interro Mars 2022

Soit a un paramètre réel

On considère le programme (P(a)) $\begin{cases} Min \ \ x^2+(y-a)^2 \\ (x-1)^2+y^2\leq 1 \end{cases}$

a) Montrer, sans résoudre le programme, que

$$(x^*,y^*) \in SO(P(a)) \Leftrightarrow (x^*,-y^*) \in SO(P(-a))$$

b) Représenter le domaine

c) Montrer que la solution optimale n'est jamais intérieure

d) Donner l'expression d'un vecteur dirigeant le cône normal en un point (x,y) de la frontière du domaine

e) Calculer les coordonnées de la solution optimale

f) Que se passe t-il quand a tend vers $+\infty$? Ce résultat était-il prévisible ?

Corrigé :

a) Notons $f_a:(x,y)\to x^2+(y-a)^2$ et $K=\{(x,y)/(x-1)^2+y^2\leq 1\}$,

le programme (P(a)) s'écrit alors (P(a)) $\begin{cases} Min \ \ f_a \\ K \end{cases}$

Notons $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\to(x,-y)$. L'application Φ est une symétrie et on a clairement $f_a\circ\Phi=f_{-a}$ et $\Phi(K)=K$.

Montrons maintenant que $\Phi(SO(P(a)))=SO(P(-a))$:

$$\begin{aligned}(x^*,y^*)\in SO(P(a)) \quad &\Leftrightarrow (x^*,y^*)\in K \text{ et } \forall (x,y)\in K,\ f_a(x^*,y^*)\leq f_a(x,y)\\ &\Leftrightarrow \Phi(x^*,y^*)\in K \text{ et } \forall (x,y)\in K,\ f_a\circ\Phi(\Phi(x^*,y^*))\leq f_a\circ\Phi(\Phi(x,y))\\ &\Leftrightarrow \Phi(x^*,y^*)\in K \text{ et } \forall (x,y)\in K,\ f_{-a}(\Phi(x^*,y^*))\leq f_{-a}(\Phi(x,y))\end{aligned}$$

Donc, en faisant le changement de variable $(x',y')=\Phi(x,y)$:

$$\begin{aligned}(x^*,y^*)\in SO(P(a)) \quad &\Leftrightarrow \Phi(x^*,y^*)\in K \text{ et } \forall (x',y')\in K,\ f_{-a}(\Phi(x^*,y^*))\leq f_{-a}(x',y')\\ &\Leftrightarrow \Phi(x^*,y^*)\in SO(P(-a))\end{aligned}$$

b) Il s'agit du disque fermé de centre (1 , 0) et de rayon 1 . Noter qu'il est tangent au point (0 , 0) à la droite x = 0 .

(figure)

c) Si X = (x , y) est solution intérieure, on doit avoir $\nabla f(x,y)=0$, i.e. $\begin{cases} 2x & = & 0 \\ 2(y-a) & = & 0 \end{cases}$, qui

équivaut à X = (0 , a) . Mais en ce point $(x-1)^2+y^2=1+a^2\geq 1$ et donc (0 , a) n'est pas dans l'intérieur du domaine $\operatorname{int}(K)=\{(x,y)/(x-1)^2+y^2<1\}$. La SO n'est donc pas intérieure.

d) Les points de la frontière du domaine sont les points qui saturent l'unique contrainte

$g(x,y)=(x-1)^2+y^2\leq 1$. Le gradient de cette contrainte est $\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}2(x-1)\\2y\end{pmatrix}$ et il ne s'annule qu'au point (1 , 0) qui n'est pas dans la frontière de K , donc la contrainte est qualifiée et en un point X de la fontière de K on a $N_X K=\mathbb{R}_+\nabla g(X)=\{\begin{pmatrix}2\lambda(x-1)\\2\lambda y\end{pmatrix}/\lambda\geq 0\}$.

e) La condition nécessaire du premier ordre est $\nabla(-f(X))\in N_X K$, i.e.

$$(S)\quad \begin{cases} -2x & =2\lambda(x-1)\\ -2(y-a) & =2\lambda y\\ \lambda & \geq 0\end{cases} .$$

Le plus simple ici pour éliminer λ est d'écrire que le déterminant des vecteurs $\begin{pmatrix}-2x\\-2(y-a)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2(x-1)\\2y\end{pmatrix}$ est nul, i.e. $xy-(y-a)(x-1)=0$, soit $ax+y=a$. D'où, en reportant $y=a(1-x)$ dans la contrainte $(x-1)^2+y^2=1$, on obtient

$$(x-1)^2=\frac{1}{1+a^2} .$$

On a donc apparemment deux candidats, mais en fait l'un des deux doit pouvoir être éliminé puisque le programme est "strictement" convexe, et donc le système (S) doit caractériser l'unique solution optimale.

En revenant à la première équation du système, et compte tenu de $\lambda\geq 0$, on se rend compte que, si $x>1$, alors $2\lambda(x-1)\geq 0$ et donc $-2x\geq 0$, ce qui est absurde.

La solution optimale est donc

$$X^*(a)=(1-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}) .$$

f) Quand a tend vers $+\infty$, la solution optimale $X^*(a)$ tend vers le point $(1,1)$.

Cela n'est pas étonnant si on comprend la nature géométrique du problème : (P(a)) consiste à trouver le point du disque K le plus proche d'un point courant (0 , a) sur la droite x = 0 , ou autrement dit, à projeter orthogonalement le point (0 , a) sur le disque. Quand a part à l'infini au "Nord" on s'attend bien à voir la solution converger vers le point le plus au "Nord" du domaine.