Université Paris 1 - Magistère d'Economie
Optimisation – Corrigé Mai 2019

Exercice 1

Soit α un paramètre > 0 . On considère le domaine
$K(\alpha)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y\leq\alpha \ , \ x\geq 0 \ \ et \ \ y\geq 0\}$

a) Représenter le domaine $K(\alpha)$. Est-il convexe ?

b) Représenter les cônes normaux aux différents points du domaine

c) Montrer que le domaine $K(\alpha)$ est qualifié

Soient maintenant p et q deux paramètres **strictement positifs** supplémentaires.

On considère le programme $(P)\begin{cases} Max_{x,y} \quad px+qy \\ (x,y)\in K(\alpha)\end{cases}$

d) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kühn et Tücker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? suffisantes ?

e) Montrer que la contrainte $x^2+y\leq\alpha$ est saturée à l'optimum

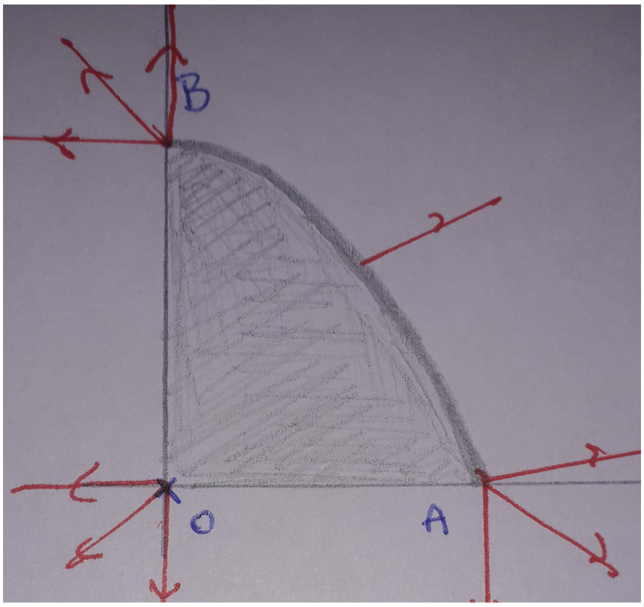
f) Montrer que la contrainte $x\geq 0$ n'est jamais saturée à l'optimum

g) En supposant $y>0$ à l'optimum, résoudre et donner la condition sur les paramètres correspondante

h) En supposant $y=0$ à l'optimum, résoudre et donner la condition sur les paramètres correspondante

Corrigé :

a)



La fonction $g(x,y):(x,y)\to x^2+y-\alpha$ est convexe comme "somme directe" des fonctions convexes $x\to x^2$ et $y\to y-\alpha$, les deux autres contraintes sont affines, donc le domaine est convexe.

b) Les cônes normaux sont en rouge sur la figure.

c) Les points à vérifier sont les points qui saturent la contrainte non-affine

$g(x,y)=x^2+y-\alpha\leq 0$. Le gradient de cette contrainte est $\nabla g(x,y)=\binom{2x}{1}$, il ne s'annule pas, donc les points qui ne saturent que la contrainte g sont qualifiés.

Reste à vérifier les deux points qui saturent deux contraintes dont la fonction g .

Au point $A=(\sqrt{\alpha},0)$ les gradients des contraintes saturées sont $\binom{2\sqrt{\alpha}}{1}$ et $\binom{0}{1}$, ils sont indépendants.

Au point $A=(0,\alpha)$ les gradients des contraintes saturées sont $\binom{0}{1}$ et $\binom{1}{0}$, ils sont indépendants.

Le domaine est bien qualifié.

d) $L(x,y,\lambda,\mu_x,\mu_y)=px+qy-\lambda(x^2+y-\alpha)+\mu_x x+\mu_y y$

$$(KT)\quad\begin{cases} p-2\lambda x+\mu_x & =0 \quad (1)\\ q-\lambda+\mu_y & =0 \quad (2)\\ \lambda(x^2+y-\alpha) & =0\\ \mu_x x & =0\\ \mu_y y & =0\\ \lambda,\mu_x,\mu_y & \geq 0\\ (x,y)\in K(\alpha) \end{cases}$$

Les conditions de KT sont nécessaires car le domaine est qualifié, elles sont aussi suffisantes puisque le programme est convexe.

e) Si $x^2+y<\alpha$, le multiplicateur λ est nul, l'équation (1) conduit alors à $p+\mu_x=0$ ce qui est impossible puisque $p>0$ et $\mu_x\geq 0$.

f) Si $x=0$, l'équation (1) conduit encore une fois à $p+\mu_x=0$, ce qui est impossible.

g) Si $y>0$, $\mu_y=0$, alors (2) donne $\lambda=q$ et, compte tenu de $\mu_x=0$ d'après f), l'équation (1) donne alors $x=\frac{p}{2q}$, d'où $y=\alpha-\frac{p^2}{4q^2}$ puisque $x^2+y=\alpha$ d'après e).

Et il faut $y>0$, la condition sur les paramètres est donc $\alpha>\frac{p^2}{4q^2}$.

h) Si $y=0$, $x=\sqrt{\alpha}$ puisque $x^2+y=\alpha$ et (1) donne alors $\lambda=\frac{p}{2\sqrt{\alpha}}$, puis (2) donne $\mu_y=\frac{p}{2\sqrt{\alpha}}-q$. La condition $\mu_y\geq 0$ équivaut alors à $\alpha\leq\frac{p^2}{4q^2}$. //

Exercice 2

Soit a un paramètre réel

On considère le programme (P(a)) $\begin{cases} Min\ \ x^2+(y-a)^2\\ \quad (x-1)^2+y^2\leq 4 \end{cases}$

a) Montrer, sans résoudre le programme, que
$(x^*, y^*) \in SO(P(a)) \Leftrightarrow (x^*, -y^*) \in SO(P(-a))$
b) Représenter le domaine
c) S'agit-il d'un programme convexe ?
d) Montrer que le programme est qualifié
e) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kühn et Tücker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? suffisantes ?
f) On suppose la solution intérieure, quelle est alors sa valeur et quelle condition doit être vérifiée par le paramètre a ?
g) On suppose la contrainte saturée à l'optimum, calculer les coordonnées de la solution optimale

h) Que se passe t-il quand a tend vers $+\infty$? Ce résultat était-il prévisible ? (on pourra dessiner quelques courbes de niveau)