Université Paris 1 - Magistère d'Economie
Optimisation - Mars 2021
Enoncé et Corrigé

Exercice 1

Trouver le maximum et le minimum de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to (x-y)e^{-(x^2+2y^2)}$$

(l'existence est admise)

Correction :

La condition nécessaire du premier ordre pour un extremum libre est l'annulation du gradient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\textit{c'est à dire} \quad \begin{cases} e^{-x^2-2y^2} - 2x(x-y)e^{-x^2-2y^2} = 0 \\ -e^{-x^2-2y^2} - 4y(x-y)e^{-x^2-2y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\textit{i.e.} \quad \begin{cases} 1 - 2x(x-y) = 0 \\ -1 - 4y(x-y) = 0 \end{cases}$$

On voit que la quantité $x-y$ *ne peut pas s'annuler et en additionnant les deux équations on obtient* $-2x - 4y = 0$ *. Ensuite, en reportant* $x = -2y$ *dans une des deux équations, on obtient*

$$1 - 12y^2 = 0$$

On a donc deux points candidats :

$$A = \left(-\frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}\right) \quad \textit{et} \quad B = -A$$

Comme $f(A) < 0$ *et* $f(B) > 0$ *,* A *doit être le minimum et* B *le maximum de* f *(en admettant l'existence de ces extremums).*

Exercice 2

On considère le programme (P) $\begin{cases} Max \quad px + y \\ x^2 + y^2 \leq 5 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

où p est un paramètre > 0

a) Représenter le domaine (préciser les coordonnées des points qui saturent deux contraintes)

b) Montrer que (P) n'admet jamais de solution intérieure

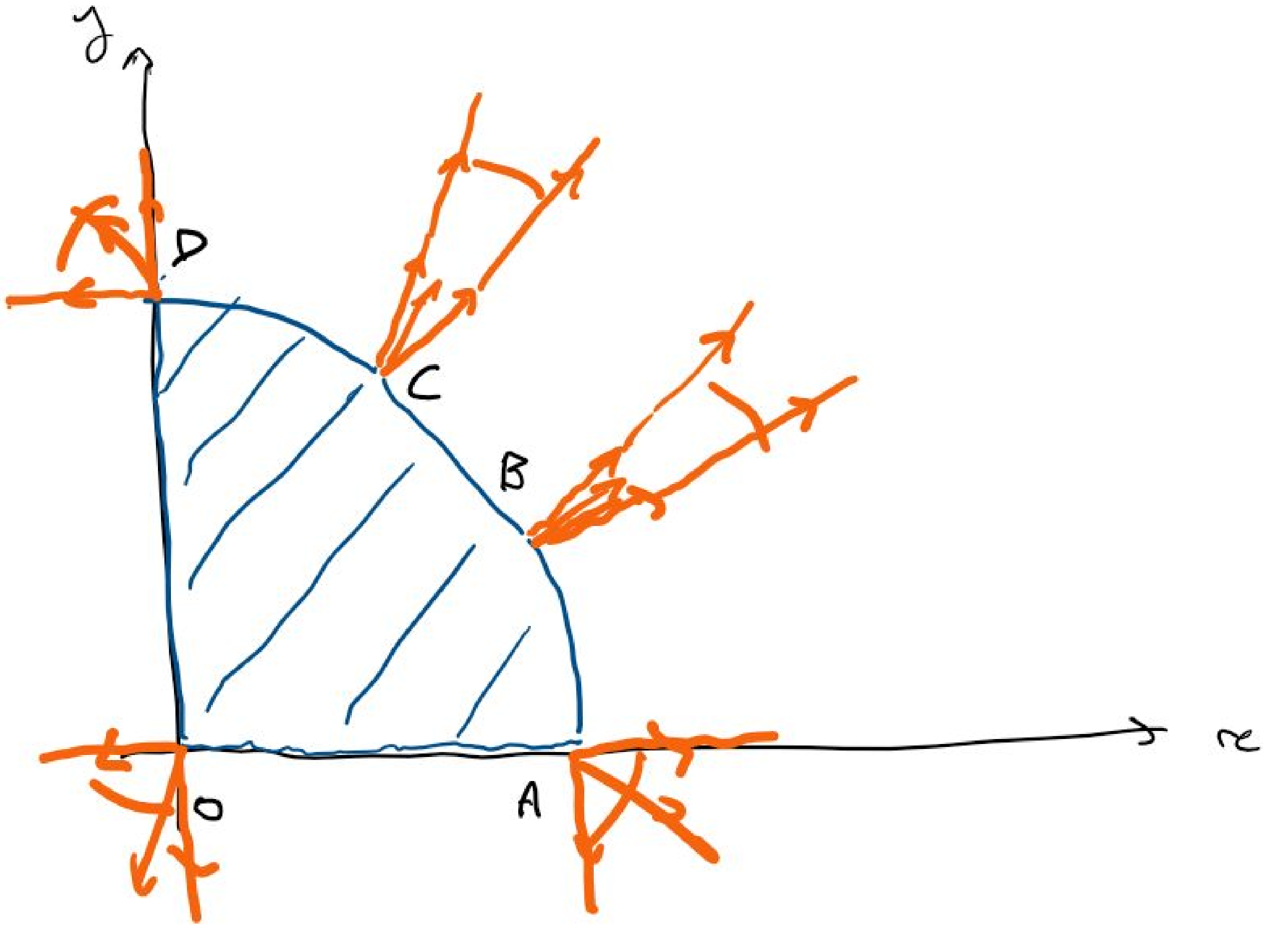
c) Représenter les cônes normaux aux points du domaine qui saturent deux contraintes

d) Résoudre le programme en discutant sur la valeur du paramètre p

Correction :

a) Les points qui saturent deux contraintes sont

$O=(0,0),\ A=(\sqrt{5},0),\ B=(2,1),\ C=(1,2),\ D=(0,\sqrt{5})$



b) On a $\forall X, \nabla f(X)=\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, par conséquent il n'y a jamais de solution intérieure

c) Voir a)

d) On peut noter que le programme (P) est convexe (max d'une fonction concave sur un domaine convexe) donc la CN1 géométrique d'optimalité est nécessaire et suffisante.

Comme le gradient de f a des coordonnées strictement positives, on voit que la SO est toujours sur la frontière "Nord-Est" du domaine.

Les normales sortantes au disque $g(x,y)=x^2+y^2-5\leq 0$ aux points B = (2,1) et C = (1,2) sont dirigées respectivement par les vecteurs $\nabla g(B)=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\nabla g(C)=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, la normale sortante au demi-plan $h(x,y)=x+y-3\leq 0$ est en tout point X dirigée par le vecteur $\nabla h(X)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Au point B le cône normal s'écrit $N_B K=\{\lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \lambda,\mu\geq 0\}$, on aura donc $\nabla f(B) \in N_B K$ ssi $\begin{cases} p = 4\lambda + \mu \\ 1 = 2\lambda + \mu \end{cases}$, avec $\lambda, \mu \geq 0$,

c'est à dire $p = 2\lambda + 1$ avec $\lambda \geq 0$ et $\mu = 1 - 2\lambda \geq 0$, donc ssi $1 \leq p \leq 2$
On montre de même que $\nabla f(C) \in N_C K$ ssi $1/2 \leq p \leq 1$

(tout ceci peut aussi se voir géométriquement sans calculs : au point B le vecteur $\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$ ne peut être "entre" les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ que si $1 \leq p \leq 2$, etc ...)

On en déduit les cas suivants :

si $1/2 \leq p < 1$ la SO est le point C = (1,2)

si $p = 1$ tout point du segment [C , B] est SO

se $1 < p \leq 2$ la SO est le point B = (2,1)

Il reste les cas $p < 1/2$ et $p > 2$ où on aura une SO sur le cercle. La CN1 s'écrit alors

$\nabla f(X) = \lambda \nabla g(X)$ avec $\lambda \geq 0$, i.e. $\begin{cases} p = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \end{cases}$.

Par élimination de λ il vient $x = py$, d'où, compte tenu de $x^2 + y^2 = 5$, les coordonnées de la SO : $X^* = (\sqrt{\frac{5p^2}{1+p^2}}, \sqrt{\frac{5}{1+p^2}})$