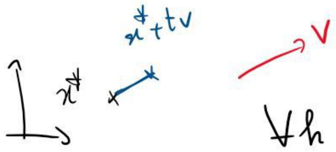
Ex6 $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en x^*

$v \in \mathbb{R}^n$ tq $\|v\| = 1$

$$Df(x^*, v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t}$$

a)



f différentiable en x^* donc

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad f(x^* + h) = f(x^*) + (\nabla f(x^*) \mid h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Pour $h = tv$, on a donc

$$f(x^* + tv) - f(x^*) = (\nabla f(x^*) \mid tv) + \|tv\| \varepsilon(tv)$$

donc, pour tout $t > 0$,

$$\frac{1}{t}\left(f(x^* + tv) - f(x^*)\right) = (\nabla f(x^*) \mid v) + \|v\| \underbrace{\varepsilon(tv)}_{\xrightarrow[t \to 0]{} 0}$$

donc $\lim_{t \to 0^+}$ existe et vaut $(\nabla f(x^*) \mid v)$

On appelle cette quantité la dérivée directionnelle dans la direction v

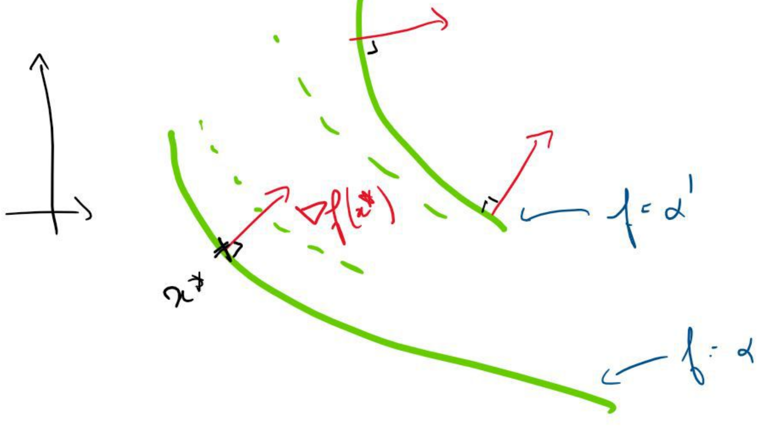
b) on suppose $\nabla f(x^*) \neq 0$

on cherche à résoudre $\begin{cases} \max_v (\nabla f(x^*) \mid v) \\ \|v\| = 1 \end{cases}$

on a $\forall v, \; (\nabla f(x^*) \mid v) = \|\nabla f(x^*)\| \underbrace{\|v\|}_{=1} \cos(\nabla f(x^*), v)$

le cos est maximal quand il vaut 1 ce qui est le cas lorsque

$$v = v^* = \frac{\nabla f(x^*)}{\|\nabla f(x^*)\|}$$



c'est en suivant $\nabla f(x^*)$ qu'on augmente le plus vite la fonction f (localement)