Ex1 du poly

$(P_1)\begin{cases}\max f_1(x_1)\\ x_1\in K_1\end{cases}$ $(P_2)\begin{cases}\max f_2(x_2)\\ x_2\in K_2\end{cases}$ $(P)\begin{cases}\max f_1(x_1)+f_2(x_2)\\ x_1\in K_1\\ x_2\in K_2\end{cases}$

Mq $x^*\in So(P) \iff (x_1^*\in So(P_1)$ et $x_2^*\in So(P_2))$

$\Leftarrow$) on a $\begin{cases}\forall x_1\in K_1, & f_1(x_1)\le f_1(x_1^*)\\ \forall x_2\in K_2, & f_2(x_2)\le f_2(x_2^*)\end{cases}$

donc, en additionnant, $\forall x_1\in K_1, \forall x_2\in K_2$,

$f_1(x_1)+f_2(x_2)\le f_1(x_1^*)+f_2(x_2^*)$

et on a aussi $x_1^*\in K_1, x_2^*\in K_2$

donc $(x_1^*, x_2^*)\in So(P)$

$\Rightarrow$) On a $\forall x_1\in K_1, \forall x_2\in K_2$, $f_1(x_1)+f_2(x_2)\le f_1(x_1^*)+f_2(x_2^*)$

en particulier pour $x_1=x_1^*$:

$\forall x_2\in K_2$ $\cancel{f_1(x_1^*)}+f_2(x_2)\le \cancel{f_1(x_1^*)}+f_2(x_2^*)$

et de même $\forall x_1\in K_1$, $f_1(x_1)\le f_1(x_1^*)$ en posant $x_2=x_2^*$ dans (I)

Ex3 1. $f(x)=(\sum_1^n x_i)\exp(\sum_1^n x_i)$ max? min?

on pose $y=\sum x_i$, cad on pose $g: x\to \sum x_i$

et on remarque que maximiser ou min. f revient à max. ou min $h: y\to ye^y$

$h'(y)=e^y+ye^y=e^y(1+y)$

y		-1		$+\infty$
h'	$-$	0	$+$	
h	$\searrow$		$\nearrow$	

-1 minimum global de h

Donc pour le min, f a pour So tous les points x / $\sum_1^n x_i=-1$

Pour le max, il n'y en a pas puisque $\sup_{\mathbb{R}} h=+\infty$ (car $\lim_{y\to+\infty} h(y)=+\infty$)

2. $f(x)=\sum_{i=1}^n x_i\ln(x_i)$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$

pas de max car $\sup f=+\infty$

puisque $\lim_{x_1\to+\infty} f(x_1,1,\dots,1)=+\infty$ (par exemple)

min?

On utilise l'Exercice 1 :

$(P)\begin{cases}\min \sum_{i=1}^n(x_i\ln x_i)\\ \forall i, x_i>0\end{cases} \iff (Q)\begin{cases}\min t\ln t\\ t>0\end{cases}$

au sens où $So(P)=(So(Q))^n$

On est ramené à étudier $g: t\mapsto t\ln t$ sur $\mathbb{R}_+^*$

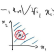
$g'(t)=\ln t+1$

t	0		$1/e$	
g'	$\Vert$	$-$	0	$+$
g	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$

g a un unique minimum $t^*=1/e$

Pour f unique minimum $X^*=(1/e,\dots,1/e)$

Remarque : le domaine $\{(x_1,\dots,x_n)/\forall i, x_i>0\}$ de (P) est ouvert



donc en extrémum, on a CN1 $\nabla f(x^*)=0$, i.e $\forall i, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)=0$

cad $\forall i, \ln x_i+1=0$

i.e $\forall i$, $x_i=1/e$

Reste à justifier que $x^*=(1/e,\dots,1/e)$ est bien le min global de f, on a seulement utilisé une condition nécessaire.

Suffit à démontrer que le programme (P) est convexe, cad pour $\begin{cases}\min f\\ K\end{cases}$,

on a $\begin{cases}f \text{ fonction convexe } ①\\ K \text{ ensemble convexe } ②\end{cases}$

puisque ① $\forall x\in\mathbb{R}_{++}^n$, $H_f(x)=D^2f(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \\ \dots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}(x)$

$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$

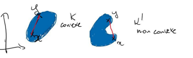
est semi définie positive, cad a toutes ses valeurs propres ≥ 0

en effet $\forall x$, $H_f(x)=\begin{pmatrix}1/x_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1/x_n\end{pmatrix}$

(ou plus simplement f est somme des fonctions convexes en x_i qui sont $\begin{array}{l}x_i\mapsto x_i\ln x_i\\ \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\end{array}$)

② $K=\{x/\forall i, x_i>0\}$ est convexe car toutes les contraintes qui le définissent sont affines

Rappel : Une partie K de $\mathbb{R}^n$ est dite convexe si $\forall(x,y)\in K^2$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $\lambda x+(1-\lambda)y\in K$



Ex5 $A=(a,0,0)$

$B=\{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2\le 1\}$ boule fermée $\bar{B}(0,1)$

$H=\{(x,y,z)/x-z=0\}$ un plan

on cherche $d(A,B\cap H)^2$

a) on cherche à résoudre $\begin{cases}\min d(A,X)^2\\ X\in B\cap H\end{cases}$

cad $(P)\begin{cases}\min (x-a)^2+y^2+z^2=f(x,y,z)\\ x^2+y^2+z^2\le 1\\ x-z=0\end{cases}$

Remarque (P) est convexe car f somme de fonctions convexes, donc convexe

dom(P) est convexe comme intersection de deux convexes

(P) admet une solution car $\begin{cases}f \text{ est continue}\\ \text{dom}(P) \text{ est fermé car toutes les contraintes sont d'inégalité larges } (y-z=0 \iff \begin{cases}y-z\ge 0\\ y-z\le 0\end{cases})\\ \text{et dom}(P) \text{ est borné car inclus dans la boule } B\end{cases}$

b) Mq si $(x,y,z)\in \text{Dom}(P)$ alors $(x,0,z)$ aussi et améliore f

en effet, si $y\neq 0$, et $(x,y,z)\in\text{Dom}(P)$

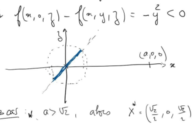
$\begin{cases}x^2+0^2+z^2<x^2+y^2+z^2\le 1\\ x-z=0\end{cases}$

montre que $(x,0,z)\in\text{Dom}(P)$

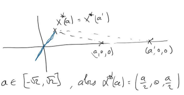
et $f(x,0,z)-f(x,y,z)=-y^2<0$

c)

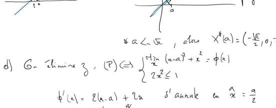
$\begin{cases}\min (x-a)^2+z^2\\ x^2+z^2\le 1\\ x=z\end{cases}$



3 cas : * $a>\sqrt{2}$, alors $X^*=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$



* $a\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, alors $X^*(a)=(\frac{a}{2},0,\frac{a}{2})$



projection orthogonale

* $a<-\sqrt{2}$, alors $X^*(a)=(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$

d) On élimine z, $(P)\iff\begin{cases}\min_x (x-a)^2+x^2=\phi(x)\\ 2x^2\le 1\end{cases}$

$\phi'(x)=2(x-a)+2x$ s'annule en $\hat{x}=\frac{a}{2}$

x		$a/2$	
ϕ'	$-$	0	$+$
ϕ	$\searrow$		$\nearrow$

$\hat{x}=\frac{a}{2}$ minimum libre de ϕ sera So s'il est dans le domaine $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$

si $a/2<-\frac{\sqrt{2}}{2}$, i.e. $a<-\sqrt{2}$, $\phi\nearrow$ st^t sur le domaine donc $x^*(a)=-\sqrt{2}/2$

si $a/2>\frac{\sqrt{2}}{2}$, i.e $a>\sqrt{2}$, ϕ st^t $\searrow$ sur le domaine $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$

donc $x^*(a)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ex2 : $(P)\begin{cases}\min x^2+y^2\\ x+y^2=b\\ x\geq a\end{cases}$ méthode 2 : on élimine y

$(P)\iff\begin{cases}\min_{x,y} x^2+b-x\\ x=b-y^2\\ x\geq a\end{cases}\iff\begin{cases}\min_x x^2+b-x\\ x\le b\\ x\geq a\end{cases}$

la contrainte $x=b-y^2$ force $x\le b$