Université Paris I - Panthéon - Sorbonne

Magistère d'économie

Correction de l'exercice 11

Exercice 11. On considère le programme dans $\mathbb{R}^2$

$$(P)\left\{\begin{array}{l} Max \quad f(x,y) = -2x^2 - 2y^2 + 3xy + 7x \\ \qquad\qquad -3x + y^2 \leq 0 \\ \qquad\qquad 3x + 4y \leq 12 \\ \qquad\qquad y \geq 0 \end{array}\right. .$$

a) Représenter le domaine

b) Montrer que (P) admet une solution optimale unique

c) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kühn et Tücker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? Suffisantes ?

d) Montrer que la SO n'est pas un point intérieur

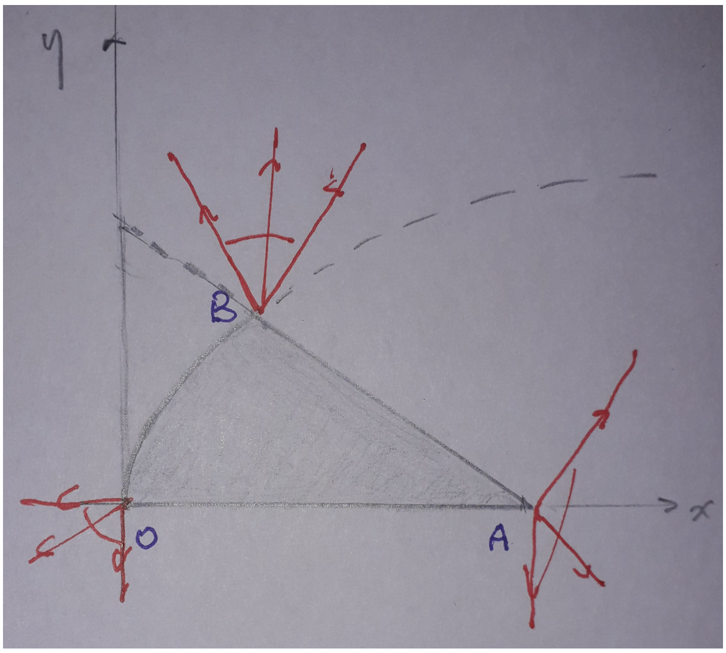
e) Tracer les droites d'équation $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ et en déduire une partition du plan en 4 régions correspondant à différentes directions du gradient de f

f) Déduire de ce qui précède que seule la contrainte $3x + 4y \leq 12$ est saturée à l'optimum

g) Déterminer les coordonnées de la solution optimale

Correction :

a) On obtient la figure suivante



Les points qui saturent deux contraintes sont 0 = (0,0), A = (4,0) et B = (4/3,2) .

Les cônes normaux sont représentés en rouge.

b) Pour l'existence, le domaine est fermé car défini par des contraintes continues d'inégalité large. Et il est aussi borné. Donc, d'après le théorème de Weierstrass il existe bien une SO.
Ensuite, on sera assuré de l'unicité de la SO si le programme est "strictement" convexe, i.e. si on maximise une fonction strictement concave sur un domaine convexe.

b)i) Le domaine est-il convexe ?

Les fonctions $g_2(x,y) \to 3x+4y-12$ et $g_3(x,y) \to -y$ sont convexes car affines, quant à la fonction $g_1(x,y) \to -3x+y^2$, elle est convexe elle aussi comme "somme directe" des fonctions convexes $x \to -3x$ et $y \to y^2$.

Par conséquent le domaine $K = \{(x,y) / g_1(x,y) \leq 0, g_2(x,y) \leq 0, g_3(x,y) \leq 0\}$ est convexe.

b)i)) La fonction objectif est-elle strictement concave ?

On calcule la matrice Hessienne de f : $D^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}(x)\right)_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, elle est définie négative car son déterminant (le produit des valeurs propres) est > 0 et sa trace (la somme des valeurs propres) est < 0 , et donc les deux valeurs propres sont < 0 . La fonction objectif est bien strictement concave.

Conclusion : on a bien une SO unique.

c) Le Lagrangien est

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -2x^2 - 2y^2 + 3xy + 7x - \lambda_1(-3x+y^2) - \lambda_2(3x+4y-12) - \lambda_3 \cdot (-y)$$

Et les conditions de Kühn et Tücker sont

$$\begin{cases} -4x+3y+7+3\lambda_1-3\lambda_2 & = 0 \\ 3x-4y-2\lambda_1 y-4\lambda_2+\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1(-3x+y^2) & = 0 \\ \lambda_2(3x+4y-12) & = 0 \\ \lambda_3 y & = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq 0 \\ (x,y) \in K & \end{cases}$$

Ces conditions sont suffisantes car le programme est convexe.

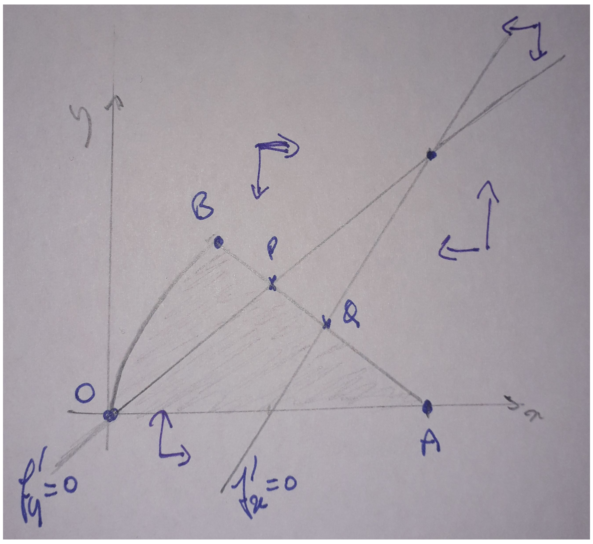
Elles seront aussi nécessaires si le domaine est qualifié, vérifions-le :

Les gradients des contraintes $\begin{pmatrix} -3 \\ 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne s'annulent pas, donc les points saturant une seule contrainte sont qualifiés. Ensuite le point 0 sature des contraintes affines, donc il est qualifié. Restent les points O et B : en B les gradients des contraintes saturées sont $\begin{pmatrix} -3 \\ 2y_B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, ils forment une famille libre, donc B est qualifié ; de même en O les gradients des contraintes saturées $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une famille libre. Tout point du domaine est qualifié.

Les conditions de KT sont nécessaires et suffisantes.

d) Si X est solution intérieure, on doit avoir $\nabla f(x,y)=0$, i.e. $\begin{cases} -4x+3y+7= & 0 \\ 3x-4y= & 0 \end{cases}$, qui équivaut à $(x,y) = (4,3)$, mais en ce point la contrainte $3x+4y-12\leq 0$ n'est pas vérifiée, donc ce point n'est pas dans le domaine. La SO n'est donc pas intérieure.

e) Les droites d'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-4x+3y+7=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=3x-4y=0$ divisent le plan en quatre régions, le domaine en rencontre trois.



e) En superposant les deux figures précédentes, on voit que les seuls points où la CN1 $\nabla f(X^*)\in N_{X^*}K$ peut être vérifiée sont les points du segment [P,Q], où seule la contrainte $3x + 4y \leq 12$ est saturée.

f) Cherchons quel point $X = (x,y)$ du segment]A,B[vérifie la CN1 $\nabla f(X)\in N_X K$
La contrainte saturée est $3x + 4y - 12 \leq 0$, le cône normal est

$$N_X K = \mathbb{R}_+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}3\lambda\\4\lambda\end{pmatrix}/\lambda\geq 0\right\} ,$$

on doit donc résoudre $\begin{cases} -4x+3y+7 & = & 3\lambda & (1) \\ 3x-4y & = & 4\lambda & (2) \\ 3x+4y & = & 12 & (3) \end{cases}$ avec $\lambda\geq 0$.

On élimine λ entre (1) et (2) : $4(-4x + 3y + 7) - 3(3x - 4y) = 0$, on est alors conduit au système

$\begin{cases} -25x+24y & = & -28 \\ 3x+4y & = & 12 \end{cases}$, qui a pour solution $(x,y) = (100/43,54/43)$

Ce point est la solution optimale. //