Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne | L3 MIASHS
2023/24 | M. Gourdel

Intégration - Probabilités
TD 8

Exercice 1

Soit $a \in \Omega$ tels que $\{a\} \in \mathcal{A}$. On considère $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Calculer $\int_{\{a\}} f \, d\mu$.

Exercice 2

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur cet espace. On suppose que que $X = Y$ $\mathbb{P}$-presque surement

1. *Montrer qu'il existe un ensemble mesurable négligeable N tel que pour tout $\omega \notin N$, $X(\omega) = Y(\omega)$.*
2. *Montrer que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(B) \cup N = Y^{-1}(B) \cup N$. En déduire que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.*
3. *On considère le cas particulier $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([-1/2, 1/2], \mathcal{B}(([-1/2, 1/2]), \lambda)$ (en toute rigueur $\mathbb{P}$ est la restriction de la mesure de Lebesgue). Vérifier qu'il s'agit bien d'un espace de probabilité. On définit $X_i : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ par $X_1(\omega) = signe(x)$, $X_2 = -X_1$ Montrer que X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires de même loi mais que $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0$.*
4. *On suppose que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ et que X est intégrable montrer que Y est intégrable et que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y)$.*

Exercice 3

On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ définie par une roulette équilibrée. Donc $\Omega = \{0, 1, \ldots, 36\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. On va utiliser techniquement les règles de la roulette anglaise, qui diffère de la roulette française par le traitement du zéro.

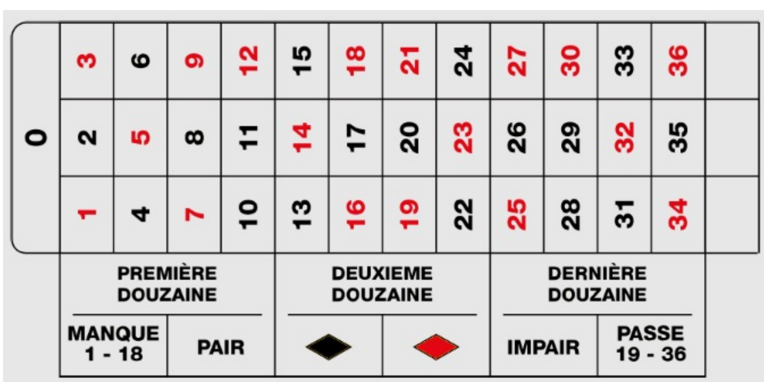

Figure 1 – la roulette anglaise.

1. *On considère la variable aléatoire X_{pair} qui est le gain net si on mise 1 sur pair : $X_{pair}(0) = -1/2$ (cas spécial, on a perdu mais pas complètement) $X_{pair}(1) = -1$ (on a perdu), $X_{pair}(2) = 1$ (on a gagné), $\ldots X_{pair}(36) = 1$. Montrer que X_{pair} est une variable aléatoire étagée et expliciter la partition associée. Que vaut l'espérance de X_{pair}.*

2. *On considère la variable aléatoire X_{manque} qui est le gain net si on mise 1 sur manque (1-18) : $X_{manque}(0) = -1/2$ (cas spécial, on a perdu mais pas complètement) $X_{manque}(1) = -1$ (on a perdu), $X_{manque}(2) = 1$ (on a gagné), $\ldots X_{manque}(36) = -1$. Montrer que X_{manque} est une variable aléatoire étagée et expliciter la partition associée.*
3. *Une conséquence de l'exercice 4 du TD 6 est que si X est une variable aléatoire étagée qui s'écrit $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ où d'une part les α_i sont distincts et d'autre part $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ constitue une partition mesurable finie[1] alors la tribu engendrée par X est égale à la tribu engendrée par la partition $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Déterminer les tribus $\mathcal{A}_{rouge}$ engendrée par X_{rouge}, $\mathcal{A}_{pair}$ engendrée par X_{pair}, $\mathcal{A}_{manque}$ engendrée par X_{manque}.*
4. *Comparer en utilisant la relation "plus fine" ces deux tribus. Montrer que les tribus $\mathcal{A}_{pair}$ et $\mathcal{A}_{passe}$ ne sont pas indépendantes.*
5. *Montrer que (avec des notations évidentes) la tribu $\sigma(\mathcal{A}_{pair} \cup \mathcal{A}_{passe})$ est la tribu engendrée par la partition la partition*
$$\{A_0, \mathcal{A}_{pair\ et\ passe}, \mathcal{A}_{pair\ et\ manque}, \mathcal{A}_{impair\ et\ passe}, \mathcal{A}_{impair\ et\ manque}\}.$$
6. *On considère la variable $X = X_{pair} + X_{passe}$. Montrer que X est une variable aléatoire discrète finie donc une fonction étagée et expliciter la partition associée ainsi que la tribu engendrée par X.*
7. *Comparer $\sigma(X)$ avec $\sigma(X_{pair})$.*
8. *Comparer $\sigma(X)$ avec $\sigma(\mathcal{A}_{pair} \cup \mathcal{A}_{passe})$.*

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire que sa fonction de répartition $\Phi(t) := F_X$ s'écrit
$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$
On considère $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = t + |t|$.

1. *Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^0((\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})))$.*
2. *Montrer que $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire positive.*
3. *Déterminer la probabilité que $\mathbb{P}(Y = 0)$.*
4. *Montrer que pour tout $t > 0$ $\mathbb{P}(0 < Y \leq 2t) = \mathbb{P}(0 < X \leq t)$. En déduire F_Y (en fonction de Φ).*
5. *La variable aléatoire Y est-elle continue ? diffuse ?*

Exercice 5

On considère une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point. On suppose de plus que la fonction F' est bornée sur $\mathbb{R}$. On va supposer que $|F'| \leq M$.

1. *Pour un x fixé, étudier le signe de la fonction auxiliaire sur $[x, +\infty[$ définie par*
$$\varphi(x) = F(y) - F(x) - M(y - x).$$
Que peut-on en déduire sur le taux d'accroissement de F ?

1. par convention on prendra chaque A_i non vide même si cela ne modifie pas le calcul de la tribu engendrée.

2. *Montrer que la fonction F est lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe une constante réelle k telle que pour tout x, y de $\mathbb{R}$*
$$|F(x) - F(y)| \leq k|x - y|$$
3. *On considère pour $n \geq 1$, la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*
$$g_n(x) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n} = n(F(x + 1/n) - F(x)).$$
Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions . En déduire que la fonction F' est mesurable sur $\mathbb{R}$.
4. *Justifier l'existence de $\int_{[a,a+a+h]} F'(t)\, d\lambda(t)$*
5. *On suppose en plus dans cette question que F est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que pour tout a de $\mathbb{R}$, pour tout $h > 0$, on a*
$$F(a + h) - F(a) = \int_{[a,a+h]} F'(t) d\lambda(t) \ = \int_a^{a+h} F'(t) dt.$$
6. *On suppose à nouveau que F dérivable en tout point et que la fonction F' est bornée sur $\mathbb{R}$. Peux-t'on affirmer que pour tout a de $\mathbb{R}$, pour tout $h > 0$, on a*
$$F(a + h) - F(a) = \int_a^{a+h} F'(t) dt \ ?$$