Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne — L3 MIASHS
2023/24 — M. Gourdel

Intégration - Probabilités
TD 9

Exercice 1

On se place dans l'espace $E = \mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ des fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. *Soit une fonction étagée positive qui s'écrit $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$. On considère $\tilde{h}$ définie par $\tilde{h}(x) = h(-x)$. Montrer que $\tilde{h}$ est aussi une fonction étagée positive et que $\int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(x)\, d\lambda(x)$.*
2. *Soit une fonction f mesurable positive. On considère $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(-x)$. Montrer que $\tilde{h}$ est aussi une fonction mesurable positive et que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)\, d\lambda(x)$.*
3. *Soit une fonction g mesurable telle que que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\lambda(x)$ a un sens. On considère $\tilde{g}$ définie par $\tilde{g}(x) = g(-x)$. Montrer que $\tilde{g}$ est aussi une fonction mesurable telle que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ a un sens et que $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x)\, d\lambda(x)$.*
4. *Soit une fonction u continue et positive sur $\mathbb{R}$ telle que que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} u(x)\, d\lambda(x)$ a un sens. On considère $\tilde{u}$ définie par $\tilde{u}(x) = u(-x)$. Montrer que $\tilde{u}$ est aussi une fonction continue telle que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ a un sens et que $\int_{\mathbb{R}} u(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x)\, d\lambda(x)$.*

Exercice 2

On considère la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X (On appelle $\mathbb{P}_X$ sa mesure de loi de probabilité) définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par

$$F_X(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right) e^{3t} & \text{si } t < 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right) e^{-4t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. *Dessiner rapidement la fonction F (on pourra le vérifier informatiquement).*
2. *Montrer que F_X possède toutes les propriétés d'une fonction de répartition.*
3. *Montrer que P_X est une loi diffuse (dit autrement que X est une variable aléatoire diffuse).*
4. *Montrer que F_X est dérivable $\lambda-$presque partout et calculer sa dérivée.*
5. *On pose*
$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right) e^{3t} & \text{si } t < 0 \\ 19 & \text{si } t = 0 \\ 2e^{-4t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$
Montrer que $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ et que pour tout réel t
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\, du$$
Ce qui s'écrit également $\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \int_{]-\infty,t]} f(u)\, d\lambda(u)$.
6. *Essayer de justifier que $\mathbb{P}_X$ a pour densité f par rapport à la mesure λ.*

7. *On admet que $\mathbb{P}_X$ a pour densité f par rapport à la mesure λ. Interpréter la dérivée $\frac{d\mathbb{P}_X}{d\lambda}$ au sens de Radon-Nykodim de $\mathbb{P}_X$ par rapport à la mesure λ.*

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}_X$. On dit que X est une variable aléatoire symétrique (respectivement que la mesure $\mathbb{P}_X$ est symétrique) si pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_X(-A) = \mathbb{P}_X(A)$.

1. *Montrer que X est symétrique si et seulement $(-X)$ et X suivent la même loi. Dit autrement il faut et si suffit que $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$. Montrer que on a alors $F_X(-t) = 1 - F_X(t) + \mathbb{P}_X(\{t\})$.*
2. *Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer que X est symétrique si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(-X = k)$. Donner un exemple de loi discrète symétrique et de loi discrète non symétrique.*
3. *Soit X une variable aléatoire intégrable possédant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce qui signifie par définition que pour tout ensemble A mesurable, on a*

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x) f(x)\, d\lambda(x).$$

   Montrer que $-X$ possède la densité g par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = f(x)$. En déduire que X est symétrique si et seulement sa densité est paire (presque partout). Donner un exemple de loi continue symétrique et de loi continue non symétrique.
4. *On suppose que X est intégrable et symétrique. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$.*
5. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire possédant une densité continue f par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(a+x) = f(a-x)$. Montrer que $Y = X - a$ est une variable aléatoire symétrique.*

   On pourra utiliser la caractérisation de la densité à l'aide de fonctions continues bornées pour montrer que Y possède une densité.

Exercice 4

On considère une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. *Justifier brièvement l'existence de $\mathbb{E}(X)$.*
2. *Montrer que si X est à valeurs finies*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

3. *Montrer que $X = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X>n}$. En déduire que*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

4. *En déduire $\mathbb{E}(X)$ si il existe $p \in]0,1[$ tel que X suit une loi telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

EXERCICE 5

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), m)$ *où* m *désigne la mesure définie par*

$$m = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}\delta_k.$$

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*, calculer* $m(\{n\})$.
2. *Calculer* $m(\mathbb{R}_+)$.
3. *On considère la suite de fonctions réelles* $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1[}$*. Justifier que* f_n *est mesurable. La fonction* f_n *est-elle* m*-presque partout continue ?*
4. *Calculer*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) dm$$
5. *Soit* g *la fonction réelle égale à l'identité sur* $\mathbb{R}_+$.
   a) *Montrer que* $d = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{1}_{\{k\}}$ m*-p.p.*
   b) *Calculer* $\int_{\mathbb{R}_+} g\, dm$.

EXERCICE 6

On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$*. Soit* f *mesurable de* $]0,1[$ *dans* $\mathbb{R}$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on définit* g_n *de* $]0,1[$ *dans* $\mathbb{R}$ *par la formule*

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{f^2(x) + 1/n}}.$$

1. *Justifier l'existence de* $\int_{]0,1[} g_n\, d\lambda$.
2. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} g_n$ *(limite simple) dans le cas* $f(x) = x^\alpha$.
3. *Même question dans le cas* $f = 0$.
4. *Même question dans le cas général.*
5. *Etudier* $\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,1[} g_n\, d\lambda$

EXERCICE 7

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu_C)$ *(mesure de comptage).*

1. *On considère les fonctions* $f(k) = \frac{1}{k^2}$ *et pour tout* $n \geq 0$ *et pour* n *entier,* $f_n(k) = \frac{nk}{(1+nk)k^2}$*. Appliquer le théorème de convergence monotone afin de montrer que*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn}{(kn+1)k^2} \to_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \tag{1}$$
2. *Adapter la question précédente afin de montrer que*
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kn}{(kn+1)k^2} \to_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \tag{2}$$