w

# Analyse dans $\mathbb{R}$

27 novembre 2023

Chapitre 1

# Suites numériques dans $\overline{\mathbb{R}}$, Rappel et Compléments

Objectifs :

1. approfondir le concept de sous-suite.
2. donner un cadre à $+\infty$ afin d'éviter des contorsions du style "la suite $(n^2)_n$ ne converge pas mais possède une limite qui est $+\infty$".
3. définir une notion "faible" de limite mais qui existerait pour toute suite.

Mot clés : valeur d'adhérence, suite de Cauchy, $\overline{\mathbb{R}}$, $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$.

## 1.1 Rappels sur $\mathbb{R}$

### 1.1.1 Majorant

**Définition 1.1.** Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est *majoré* par $M \in \mathbb{R}$ si

$$\forall a \in A,\ a \leqslant M.$$

On dit que $M$ est un *majorant* de $A$. Si l'ensemble $A$ possède un majorant, alors l'ensemble $A$ est *majoré.*

L'ensemble des réels satisfait l'axiome de la borne supérieure (A.B.S.) : toute partie $A \subset \mathbb{R}$ majorée admet un plus petit majorant. On l'appelle la *borne supérieure* de $A$ et on le note $\sup(A)$. Formellement, on écrira :

$$\sup(A) = \begin{cases} +\infty & \text{si } A \text{ n'est pas majoré} \\ \text{le plus petit des majorants} & \text{si } A \text{ est majoré.} \end{cases}$$

**Définition 1.2.** minorant, minoré, $\inf(A)$, voir cours Analyse réelle $L1$.

**Proposition 1.3.** *Si $A \subset B$ sont bornés et non vides, alors*

$$\inf(B) \leqslant \inf(A) \leqslant \sup(A) \leqslant \sup(B).$$

### 1.1.2 Suites

**Définition 1.4.** Une suite numérique correspond à la donnée d'une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui à $n$ associe $\varphi(n) = u_n$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Définition 1.5.** On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, notée $u_n \to \ell$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

**Théorème.** *(Suite monotone) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée alors elle converge vers un élément $\ell \in \mathbb{R}$.*

**Théorème.** *(Théorème d'encadrement) Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites telles que pour tout* $n \geqslant 1$*,* $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$*,*

1. *Si* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(w_n)_{n\geqslant 1}$ *sont convergentes et de même limite, i.e.* $\lim v_n = \lim w_n = \ell \in \mathbb{R}$*, alors* $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *converge aussi vers cette limite* $\ell$*.*
2. *Si* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *diverge vers* $+\infty$ *(i.e.* $\lim u_n = +\infty$*), alors* $\lim v_n = +\infty$*.*

**Théorème.** *(Suite adjacentes[1]) Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante,*
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante,*
3. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n \leqslant v_n$*,*
4. $\lim_{n\to+\infty} |v_n - u_n| = 0$.

*alors* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *convergent vers la même limite.*

### 1.1.3 Sous-suite et valeur d'adhérence d'une suite dans $\mathbb{R}$

**Définition 1.6.** La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *une suite extraite* ou *sous-suite* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_{\psi(n)}$.

**Exemple 1.7.**

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle alors*
   (a) *la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $x_n = u_{2n}$ *est une suite extraite.*
   (b) *la suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = u_{n^2}$$
   *est une suite extraite.*
   (c) *la suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $z_n = u_{-n}$ *n'est pas bien définie.*
2. *Soit* $u_n = \ln(n)$ *et la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*
   $$v_n = \inf X_n \ \textit{où}\ X_n = \{u_m | m \in \mathbb{N}, u_m \geqslant n\}.$$
   *Alors la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une sous-suite (admis) mais la formule de* $\Psi$ *est plus compliquée tout en étant programmable.*
3. *Soit* $(u_n)_n$ *la suite des valeurs approchées par défaut (à* $10^{-n}$ *près) de* $\pi$*, les mathématiciens savent que* $u_0 = 3$*,* $u_1 = 3,1$*,* $u_2 = 3,14$ *etc...On a donc deux cas de figure.*
   - *"L'écriture décimale de* $\pi$ *contient une infinité de fois le chiffre 1 ;"*
   - *"L'écriture décimale de* $\pi$ *contient un nombre fini de fois le chiffre 1."*

   *Plaçons nous dans la situation du premier cas, alors on pourrait donc définir pour chaque entier n,* $v_n$ *comme étant la plus petite "troncation par défaut de* $\pi$*" contenant exactement n fois le chiffre* 1*. Par exemple,* $v_0 = 3$*,* $v_1 = 3,1$*,* $v_2 = 3,141$ *etc... Clairement la suite* $(v_n)_n$ *constituerait une sous-suite de* $(u_n)_n$*. Pour autant, on est aujourd'hui totalement incapable de calculer* $v_n$ *pour de grandes valeurs de* $n$*.*

**Définition 1.8.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur réelle et $v \in \mathbb{R}$. On dit que $v$ est une *valeur d'adhérence* dans $\mathbb{R}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$v = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$
On note $\mathrm{Adh}_{\mathbb{R}}(x_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$.

**Exemple 1.9.**

1. De telles suites sont dites adjacentes.

1. $u_n = (-1)^n$. *On considère les suites extraites suivantes :*
   (a) $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *qui est une suite constante égale à* $1$,
   (b) $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *qui est constante égale à* $-1$.

   *Ainsi* $-1$ *et* $1$ *sont deux valeurs d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Comme* $2\mathbb{N}$ *et* $2\mathbb{N}+1$ *forment une partition de* $\mathbb{N}$, *on a obtenu toutes les valeurs d'adhérence :* $Adh_{\mathbb{R}} = \{-1, 1\}$.

2. $u_n = (e^{-n})_{n\geqslant 1}$. *La suite converge vers* $0$. *Ainsi chaque sous suite converge aussi vers* $0$ *et l'ensemble des valeurs d'adhérences est réduit au singleton* $\{0\}$.

3. $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *: difficile (voire impossible pour nous pour l'instant)...*

**Remarque 1.10.** *Si* $\Psi$ *est une application strictement croissante alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\Psi(n) \geqslant n$.

### 1.1.4 Construction de sous suites

Dans la pratique, beaucoup de sous suites ne sont pas aussi “simples” aussi explicites que $(u_{2n})_n$ ou $(u_{4n^2+1})_n$ mais “construites”.
Par exemple,

**Théorème 1.11** (Ramsey)**.** *Soit une suite réelle quelconque, il existe une sous suite monotone au sens large.*

Il s'agit là d'un résultat fondamental mais théorique. Concrètement, si on reprend la suite $u_n = \sin(n)$, on est dans l'incapacité de construire concrètement une telle sous suite. Pour autant, le résultat de Ramsey possède une conséquence importante.

**Corollaire 1.12** (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.*

*Démonstration.* Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée, d'après le théorème de Ramsey, il existe une une sous-suite $(v_n)_n = (u_{\varphi(n)})_n$. La suite $(v_n)_n$ étant monotone et bornée est donc convergente. $\square$

On va détailler ici la preuve du théorème de Ramsey pour illustrer le caractère parfois très abstrait du concept de sous suite.

*Démonstration.* Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On va introduire ici une définition (qu'il n'y a pas lieu de retenir. On va considérer que $\overline{n}$ est un pic de la suite $(u_n)_n$ (ce que l'on va noter ici “$\overline{n} \in \mathcal{P}ic((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $\overline{n}$ appartient à l'ensemble des pics de la suite $(u_n)_n$”) si tous les termes suivants le terme d'indice $\overline{n}$ sont strictement plus petits que lui. En clair,

$$\overline{n} \in \mathcal{P}ic((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) \Leftrightarrow \begin{cases} u_{\overline{n}} > u_{\overline{n}+1} \\ u_{\overline{n}} > u_{\overline{n}+2} \\ \dots \end{cases}$$

Il faut prendre le temps de déterminer l'ensemble des pics pour
- la suite $(\pi n - n^2 + 1)_n$ ;
- la suite $((-1)^n)_n$ ;
- la suite $(e^{-n})_n$ ;

De toute façon, pour une suite $(u_n)_n$ donnée, l'ensemble des Pics est un sous-ensemble fini ou infini de $\mathbb{N}$ vide ou non vide. On va construire la sous suite en distinguant plusieurs cas.

**Premier cas** L'ensemble $\mathcal{P}ic((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est vide.
Cela signifie que pour tout entier $n$, il existe un terme $k > n$ tel que $u_k \geqslant u_n$. Il suffit d'initialiser la sous suite en posant $v_0 = u_{n_0} = u_0$ puis on sait qu'il existe $u_{n_1} \geqslant u_0$ (avec $n_1 > n_0$). Mais il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} \geqslant u_{n_1}$. De proche en proche, on peut "construire" $n_0 < n_1 < \ldots$ tel que $u_{n_0} \leqslant u_{n_1} \leqslant \ldots$

**Deuxième cas** L'ensemble $\mathcal{P}ic((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est fini. Soit $N$ le plus grand élément de cet ensemble. On peut alors considérer la sous-suite $(w_n)_n = (u_n)_{n\geqslant N+1}$. Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{P}ic((w_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est vide. D'après l'étude du premier cas, il existe une sous-suite monotone $(v_n)_n$ de la suite $(w_n)_n$. Mais $(v_n)_n$ est aussi une une sous-suite monotone de $(u_n)_n$.

**Troisième cas** L'ensemble $\mathcal{P}ic((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est infini. Puisqu'il s'agit d'un sous ensemble infini de $\mathbb{N}$, on peut "numéroter" ces éléments.

$$\mathcal{P}ic((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{n_0, n_1, n_2, \ldots\},$$

avec $n_0 < n_1 < \ldots$. Mais puisque $n_0$ est un pic de la suite, et que $n_1 > n_0$, on en déduit que $u_{n_0} > u_{n_1}$. De même, puisque $n_1$ est un pic de la suite, et que $n_2 > n_1$, on en déduit que $u_{n_1} > u_{n_2}$ et ainsi de suite. De proche en proche, on peut vérifier que la sous-suite ainsi "construite" est strictement décroissante.

□

**Remarque 1.13.** *L'idée sous jacente du troisième cas est une idée à retenir. Par exemple, soit une suite $(u_n)_n$ quelconque et $A$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in A\}$ est infini alors, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in A$. C'est même une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une telle sous-suite.*

**Remarque 1.14.** *Pour finir, mentionnons un cas facile de construction de sous-suites, si à partir d'un certain rang $N$ tous les termes sont dans $A$ alors, il existe une sous-suite de la forme $(u_{n+N})_{n\in\mathbb{N}}$ dont les éléments sont tous dans $A$.*

## 1.2 Suites de Cauchy

### 1.2.1 Définition

La définition de la convergence d'une suite dans $\mathbb{R}$ nécessite de connaître sa limite, ce qui est bien souvent très contraignant. On va prendre un exemple fondamental ici, qui s'appellera plus tard la série harmonique.

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 1 + 1/2 \\ \ldots \\ u_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n \\ \ldots \end{cases} \tag{1.1}$$

Cette suite vérifie $u_{n+1} - u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ mais il ne s'agit que d'une condition nécessaire de convergence. On va introduire un critère qui lui est nécessaire et suffisant et dont l'énoncé n'a pas besoin de connaître la valeur numérique d'une éventuelle limite.

**Définition 1.15.** Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de *Cauchy* ("vérifie le critère de Cauchy") si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant n_0,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

ou de manière équivalente

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant n_0,\ \forall r \in \mathbb{N},\ |u_{p+r} - u_p| \leqslant \varepsilon.$$

Informellement, les termes se tassent les uns à coté des autres. Formellement, si on introduit les ensembles $X_n = \{u_t,\ t \geqslant n\} = \{u_n, u_{n+1}, \ldots\}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N_\varepsilon$ tel que $X_{N_\varepsilon}$ soit contenu dans un intervalle de longueur $2\varepsilon$. Mais puisque par construction $X_{n+1} \subset X_n$, on peut avoir la vision intuitive la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement $X_n$ peut être rendu aussi "petit", "étroit" (contenu dans un intervalle de longueur aussi petite) que l'on souhaite.

**Exemple 1.16.**

1. *$w_n = \frac{1}{n^2}$ est une suite de Cauchy : soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $n_0$ tel que $\frac{1}{{n_0}^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi*

$$\forall p, q \geqslant n_0,\ |u_p - u_q| \leqslant \|u_p\| + \|u_q\| \leqslant \varepsilon.$$

2. *La suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy. On considère la négation de la définition : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists p, q \geqslant n_0,\ |u_p - u_q| \geqslant \varepsilon$.*

   *On choisit par exemple $\varepsilon = 1$. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, considérons $p = n_0$ et $q = n_0 + 1$ alors*

$$|u_p - u_q| = |u_{n_0} - u_{n_0+1}| = \begin{cases} |-1-1| = 2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ |1+1| = 2 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

3. *La suite définie par $u_n = \ln(n)$ n'est pas une suite de Cauchy. En effet soit $\varepsilon = \ln(2)$ alors pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, on choisit $p = n_0$ et $q = 3n_0$ alors*

$$|u_p - u_q| = |u_{3n_0} - u_{n_0}| = |\ln(3n_0) - \ln(n_0)| = |\ln(3) + \ln(n_0) - \ln(n_0)| = \ln(3) > \varepsilon.$$

**Proposition 1.17.** *Toute suite de Cauchy est bornée.*

*Démonstration.* Choisissons $\varepsilon = 1$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \geqslant n_0,\ |u_p - u_q| \leqslant 1.$$

En particulier, en choisissant $q = n_0$, pour tout $p \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} |u_p - u_{n_0}| \leqslant \varepsilon &\to -1 \leqslant u_p - u_{n_0} \leqslant +1, \\ &\to u_{n_0} - 1 \leqslant u_p \leqslant u_{n_0} + 1. \end{aligned}$$

On pose $M = \max(u_0, u_1, ..., u_{n_0} + 1)$ and $m = \min(u_0, u_1, ..., u_{n_0} - 1)$. Ce sont deux nombres réels et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien à la fois majorée par $M \in \mathbb{R}$ et minorée par $m \in \mathbb{R}$. □

**Remarque 1.18.** *On retrouve le fait que la suite définie par $u_n = \ln(n)$ n'est pas une suite de Cauchy. En effet, elle n'est pas bornée.*

### 1.2.2 Caractère nécessaire et suffisant du critère de Cauchy

**Théorème 1.19** (Critère de Cauchy)**.** *Toute suite réelle est convergente dans $\mathbb{R}$ si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

*Démonstration.* $\Rightarrow$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

Ainsi si $p, q \geqslant n_0$ alors par l'inégalité triangulaire

$$|u_p - u_q| \leqslant |u_p - u_{n_0}| + |u_{n_0} - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

La suite est donc bien de Cauchy.

$\Leftarrow$ Montrons maintenant la réciproque. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors par la proposition 1.17, elle est bornée. On définit $X_n = \{u_t, t \geqslant n\} = \{u_n, u_{n+1}, \ldots\}$ qui est donc a fortiori borné (sous-ensemble de $X_0$ qui est borné). Par construction, on a $X_{n+1} \subset X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $i_n = \inf(X_n)$ et $s_n = \sup(X_n)$ qui sont deux nombres réels car l'ensemble $X_n$ est borné et donc ces suites existent par l'axiome de la borne supérieure. Montrons que les suites $(i_n)_n$ et $(s_n)_n$ sont adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par construction $X_{n+1} \subset X_n$ et d'après la Proposition 1.3, on a

$$i_n \leqslant i_{n+1} \leqslant s_{n+1} \leqslant s_n.$$

Il reste donc à prouver que $\lim_{n\to+\infty}(s_n - i_n) = 0$ pour obtenir le caractère adjacent.
On va utiliser la définition de la convergence. Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - u_{N_\varepsilon}| < \varepsilon.$$

Dit autrement, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ ,

$$u_{N_\varepsilon} - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant u_{N_\varepsilon} + \varepsilon.$$

Dit autrement $X_n \subset [u_{N_\varepsilon} - \varepsilon, u_{N_\varepsilon} + \varepsilon]$, donc en passant au sup, $s_n \leqslant u_n + \varepsilon/2$. De manière similaire, on a $i_n \geqslant u_{N_\varepsilon} - \varepsilon$. On a donc pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant (s_n - i_n) \leqslant 2\varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon$ est arbitraire (parmi les nombres strictement positifs), la suite $(s_n - i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0. Les deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Finalement, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est un élément de $X_n$ donc $s_n \leqslant u_n \leqslant i_n$. Par la théorème d'encadrement, on conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\ell$.

□

Il existe une démonstration alternative de ce théorème basé sur le théorème de Ramsey (voir page 3).

## 1.3 Définition de la droite réelle étendue $\overline{\mathbb{R}}$

D'un point de vue ensembliste, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, puisque cet ensemble contient $\mathbb{R}$, on va prolonger les structures présentes sur $\mathbb{R}$.

### 1.3.1 structure d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$

On peut analyser soit en termes de l'ordre strict "<" soit de l'ordre large "⩽".

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{“au sens de } \overline{\mathbb{R}}\text{”},\ \begin{cases} -\infty <_{\overline{\mathbb{R}}} x \\ x < +\infty, \\ (-\infty) < (+\infty), \end{cases} \qquad \begin{cases} -\infty \leqslant x \\ x \leqslant +\infty, \\ (-\infty) \leqslant (+\infty), \\ (-\infty) \leqslant (-\infty), \\ (+\infty) \leqslant (+\infty), \end{cases}$$

C'est bien une relation d'ordre totale sur $\overline{\mathbb{R}}$, en particulier si $a \leqslant b$ et si $b \leqslant a$ alors ils sont égaux, et les relations (stricte ou large) sont transitives.

### 1.3.2 structure d'addition sur $\overline{\mathbb{R}}$

Attention toutes les opérations ne sont pas autorisées.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} (-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty, \\ (+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty. \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty. \end{cases} \quad \text{au sens de } \overline{\mathbb{R}}$$

**Interprétation :** cohérence avec le fait que si une suite $(u_n)_n$ converge vers $x$ et une suite $(v_n)_n$ converge vers $+\infty$ alors $(u_n + v_n)_n$ converge vers $+\infty$ etc...

**Remarque 1.20.** *Attention, par exemple* $(+\infty) + (-\infty)$ *est une opération interdite, ce qui est cohérent avec le fait que si une suite* $(u_n)_n$ *converge vers* $+\infty$ *et une suite* $(v_n)_n$ *converge vers* $-\infty$ *alors on ne sait pas si* $(u_n + v_n)_n$ *converge...*

### 1.3.3 structure de multiplication sur $\overline{\mathbb{R}}$

Attention toutes les opérations ne sont pas autorisées.

$$\forall x > 0, \forall y < 0, \begin{cases} (-\infty) \times x = x \times (-\infty) = -\infty, \\ (+\infty) \times x = x \times (+\infty) = -\infty, \\ (+\infty) \times y = y \times (+\infty) = -\infty, \\ (-\infty) \times y = y \times (-\infty) = +\infty, \\ (+\infty) \times (-\infty) = -\infty, \\ (-\infty) \times (-\infty) = +\infty, \\ (+\infty) \times (+\infty) = +\infty. \end{cases} \quad \text{au sens de } \overline{\mathbb{R}}$$

**Interprétation :** cohérence avec le fait que si une suite $(u_n)_n$ converge vers $x$ et une suite $(v_n)_n$ converge vers $-\infty$ alors $(u_n \times v_n)_n$ converge vers $-\infty$ etc...

**Remarque 1.21.** *Attention, certaines opérations ne sont pas définies :* $0 \times (+\infty)$, $(+\infty) \times 0$.

**Interprétation :** cohérence avec le fait que si $(u_n)_n$ converge vers 0 et une suite $(v_n)_n$ converge vers $-\infty$ alors on ne peut conclure si la suite $(u_n \times v_n)_n$ converge ou non et même si elle converge, on ne peut prédire la limite, etc...

### 1.3.4 notion de convergence sur $\overline{\mathbb{R}}$ (structure "topologique")

**Définition 1.22.** On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ converge vers le nombre réel $\ell$ au sens de $\overline{\mathbb{R}}$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

**Définition 1.23.** On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ converge vers $+\infty$ au sens de $\overline{\mathbb{R}}$, si

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant M.$$

Cas particulier des suites constantes.

### 1.3.5 Compatibilité de ces structures

**Proposition 1.24.** *Soit une suite* $(u_n)_n$ *de nombre réels et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(respectivement* $\alpha = +\infty$ *) telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ *(au sens de la première année), alors* $(u_n)_n$ *est une suite convergente au sens de* $\overline{\mathbb{R}}$ *et toute suite* $(v_n)_n$ *convergente vers* $\alpha$ *au sens de* $\mathbb{R}$.

**Proposition 1.25.** *Pour toute suite $(u_n)_n$ convergente au sens de $\overline{\mathbb{R}}$ et toute suite $(v_n)_n$ convergente au sens de $\mathbb{R}$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

*en particulier si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \beta$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \beta$.*

**Proposition 1.26.** *Pour toute suite $(u_n)_n$ convergente vers $\alpha$ au sens de $\overline{\mathbb{R}}$ et toute suite $(v_n)_n$ convergente vers $\beta$ au sens de $\mathbb{R}$, chaque fois que l'opération est autorisée, (si $\alpha+\beta$ a un sens ou si $\alpha\beta$ a un sens ), on a :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) \end{cases}$$

## 1.4 Propriétés élémentaires de $\overline{\mathbb{R}}$

### 1.4.1 Majorants et borne sup au sens de $\overline{\mathbb{R}}$

**Définition 1.27.** Un ensemble $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ est *majoré* par $M \in \overline{\mathbb{R}}$ si

$$\forall a \in A,\ a \leqslant M.$$

On dit que $M$ est un *majorant* de $A$. Si l'ensemble $A$ possède un majorant, alors l'ensemble $A$ est *majoré* au sens de $\overline{\mathbb{R}}$.

Compte-tenu de la présence de $+\infty$ au sein de $\overline{\mathbb{R}}$, la notion de *majoré* au sens de $\overline{\mathbb{R}}$ n'a aucun intérêt tandis que celle de majorant au sens de $\overline{\mathbb{R}}$ est une notion pertinente. Dès lors, si par exemple on considère $A$ borné, il est inutile de préciser que c'est au sens de $\mathbb{R}$ car ce sera toujours implicitement le cas.

Compte-tenu de ce que l'on sait de $\mathbb{R}$, toute partie non vide[2] $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ majorée admet un plus petit majorant. On l'appelle la *borne supérieure* de $A$ et on le note $\sup_{\overline{\mathbb{R}}}(A)$. On peut même le définir pour toute partie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ non majorée.

### 1.4.2 Comportements des suites monotones de $\overline{\mathbb{R}}$

**Proposition 1.28.** *Toute suite monotone (au sens large) $(u_n)_n$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ est convergente au sens de $\overline{\mathbb{R}}$.*
*On peut être plus précis, si $(u_n)_n$ est croissante alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup_{\overline{\mathbb{R}}}\{u_0, u_1, \ldots\}$ tandis que si $(u_n)_n$ est décroissante alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf_{\overline{\mathbb{R}}}\{u_0, u_1, \ldots\}$*

Par exemple, si $(u_n)_n$ est croissante, il y a 4 cas de figure

- $\forall n$, $u_n = -\infty$
- il existe un rang $N_0$ tel que $\forall n \geqslant N_0$, $u_n = +\infty$
- il existe un rang $N_0$ tel que la sous-suite $(u_n)_{n\geqslant N_0}$ soit réelle bornée. Dans ce cas, la suite $(u_n)_n$ possède une limite finie.
- il existe un rang $N_0$ tel que la sous-suite $(u_n)_{n\geqslant N_0}$ soit une suite réelle (mais non bornée) et la suite $(u_n)_n$ a pour limite $+\infty$.

2. dans le cas de l'ensemble vide, il existe également une borne sup et une borne inf mais c'est beaucoup plus difficile à comprendre.

### 1.4.3 Théorème d'encadrement dans $\overline{\mathbb{R}}$

**Proposition 1.29.** *Pour toute suite $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergentes au sens de $\overline{\mathbb{R}}$ et ont même limite, si APCR, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et alors la suite $(v_n)_n$ est convergente au sens de $\overline{\mathbb{R}}$ et on a*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n$$

En particulier si APCR, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il suffit de prendre la suite constante $w_n = +\infty$

## 1.5 Limite inférieure, limite supérieure

### 1.5.1 Définitions

On va généraliser la démarche de la partie 1.2 à une suite $(u_n)_n$ quelconques à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ : soit désormais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \{u_n, u_{n+1}, ..., \} \subset \overline{\mathbb{R}}$. D'après la partie 1.4.1, l'ensemble $X_n$ admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. On pose

$$s_n = \sup(X_n) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (comme précédemment mais dans $\overline{\mathbb{R}}$) car $X_{n+1} \subset X_n$. Par la proposition 1.28, elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ et

$$\lim s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\geqslant n} u_t.$$

**Définition 1.30.** On appelle *limite supérieure* et on note $\overline{\lim}\, u_n$ la quantité $\lim s_n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Similairement, $X_n$ admet une borne inférieure. On pose

$$i_n = \sup(X_n) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

La suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car $X_{n+1} \subset X_n$. Par la proposition 1.28, elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ et

$$\lim i_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{t\geqslant n} u_t.$$

**Définition 1.31.** On appelle *limite inférieure* et on note $\underline{\lim}\, u_n$ la quantité $\lim i_n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

**Exemple 1.32.**

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite constante égale à $C$ (éventuellement constante APCR) d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ alors $\overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n = C$.*
2. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite convergente vers $\ell$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ alors $\overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n = \ell$*
3. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $\mathbb{R}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1/2$, $u_2 = 1/3$ etc... alors on peut calculer explicitement $i_n$ et $s_n$. On conclut alors que $\overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n = 0$*
4. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $\mathbb{R}$ définie par $u_n = (-1)^n$... alors on peut calculer explicitement $i_n$ et $s_n$. On conclut alors que $\overline{\lim}\, u_n = 1$ tandis que $\underline{\lim}\, u_n = -1$*

**Remarque 1.33.** *Ainsi $\underline{\lim}\, u_n$ et $\overline{\lim}\, u_n$ d'une suite réelle existent toujours (possiblement avec des valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$) alors que la notion de limite peut ne pas être définie.*

**Exemple 1.34.**

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{n^2, (n+1)^2, ...\}$, on a donc*
   (a) *$s_n = +\infty$ et $\overline{\lim}\, u_n = +\infty$,*
   (b) *$i_n = n^2$ et $\underline{\lim}\, u_n = +\infty$.*

2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{n(-1)^n, (n+1)(-1)^{n+1}, ...\}$, *on a donc*
   (a) $s_n = +\infty$ *et* $\overline{\lim}\, u_n = +\infty$,
   (b) $i_n = -\infty$ *et* $\underline{\lim}\, u_n = -\infty$.
3. $(u_n)_{n\geqslant 1} = (\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$. *Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...\}$, *on a donc*
   (a) $s_n = \frac{1}{n}$ *et* $\overline{\lim}\, u_n = 0$,
   (b) $i_n = 0$ *et* $\underline{\lim}\, u_n = 0$.
   *On peut généraliser aux suites monotones.*

*autres...*

### 1.5.2 Opérations sur $\underline{\lim}$ et $\overline{\lim}$

**Proposition 1.35.** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles alors,*
1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\overline{\lim}\, \lambda x_n = \lambda \overline{\lim}\, x_n$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\underline{\lim}\, \lambda x_n = \lambda \underline{\lim}\, x_n$,
3. $\overline{\lim}\, (-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$.

**Remarque 1.36.** *On peut utiliser le troisième résultat pour montrer des résultats sur la limite inférieure à l'aide des résultats équivalents pour la limite supérieure.*

**Remarque 1.37.** *Si* $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$, *puisque la suite* $(s_n)_n$ *est décroissante vers* $+\infty$, *elle vaut constamment* $+\infty$.

**Proposition 1.38.** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles alors, s'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$, $x_n \leqslant y_n$ *alors* $\underline{\lim}\, x_n \leqslant \underline{\lim}\, y_n$ *et* $\overline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, y_n$.

**Proposition 1.39.** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles alors,*
1. $\overline{\lim}\, (x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$,
2. $\underline{\lim}\, (x_n + y_n) \geqslant \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$,

*Démonstration.* énoncé sans preuve □

**Remarque 1.40.** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On suppose que* $\overline{\lim}\, x_n = 3$.
- *alors APCR,* $x_n \leqslant 3,1$, *mais aussi APCR,* $x_n \leqslant 3,01$ *...*
- *on peut en revanche être dans le cas ou* $x_n \leqslant 3$ *n'arrive jamais,*

**Remarque 1.41.** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On suppose que* $\overline{\lim}\, x_n = 3$.
- *alors* $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > 2,9\}$ *est un ensemble infini, mais aussi* $\{n \in \mathbb{N}, \mid x_n > 2,99\}$ *est aussi un ensemble infini.*
- *on peut avoir* $\{n \in \mathbb{N}, \mid x_n \geqslant 3\}$ *soit vide.*

### 1.5.3 Valeur d'adhérence d'une suite au sens de $\overline{\mathbb{R}}$

**Définition 1.42.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $v \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $v$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim y_n = v.$$

**Remarque 1.43.** *On rapelle que la suite d'entier* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *doit être strictement croissante pour bien avoir une suite extraite. Plus formellement, il existe :* $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que si* $u_n = \Phi(n)$ *alors* $y$ *est l'application définie par :*

$$\begin{array}{ccccc} & \Psi & & \Phi & \\ \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \to & k_n & \to & u_{k_n} = \Phi \circ \Psi(n) \end{array}$$

On note $\mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(x_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Dans le cas où $u_n = n(-1)^n$, on a montré en cours que $\mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(u_n) = \{-\infty, +\infty\}$

### 1.5.4 Lien avec les limites supérieures et inférieures

La limite supérieure et la limite inférieure sont respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs d'adhérence.

**Théorème 1.44** (admis)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors*
- $\overline{\lim}\, u_n \in Adh_{\overline{\mathbb{R}}}(u_n)$ *et* $\overline{\lim}\, u_n = \max(Adh_{\overline{\mathbb{R}}}(u_n))$,
- $\underline{\lim}\, u_n \in Adh_{\overline{\mathbb{R}}}(u_n)$ *et* $\underline{\lim}\, u_n = \min(Adh_{\overline{\mathbb{R}}}(u_n))$.

Conséquence : $Adh_{\overline{\mathbb{R}}}(u_n)$ est un sous ensemble de $[\underline{\lim}\, u_n, \overline{\lim}\, u_n]$ qui contient à la fois $\underline{\lim}\, u_n$ et $\overline{\lim}\, u_n$.

**Remarque 1.45.** *Si la suite est convergente (au sens de $\overline{\mathbb{R}}$), alors l'ensemble des valeurs d'adhérence (au sens de $\overline{\mathbb{R}}$) est un singleton (cf. la remarque 1.10).*

Montrer par exemple que la limite supérieure est une valeur d'adhérence est un résultat difficile car cette valeur d'adhérence n'est pas associée à une sous suite “naturelle” (sous-suite des termes paires, des termes impaires, ...), il faut “construire” cette sous suite. Il existe un cadre général concernant l'existence d'une sous-suite vérifiant une propriété donnée.

**Proposition 1.46.** *Soit $(u_n)$ une suite, $\mathcal{P}$ une propriété et $I = \{n \mid \mathcal{P}(u_n) \text{ vrai}\}$. Alors on a l'équivalence entre*
- *l'ensemble $I$ est infini ;*
- *il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ tel que pour tout $n$, $\mathcal{P}(u_{\varphi(n)})$ est vrai.*

**Corollaire 1.47.** *Soit $a < b$, et $(u_n)$ une suite, on a l'équivalence entre*
- *$\{n \mid a < u_n < b\}$ est infini ;*
- *il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ tel que pour tout $n$, $a < u_{\varphi(n)} < b$.*

### 1.5.5 Lien avec la limite

**Théorème 1.48** (Admis)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors, on a l'équivalence entre*

1. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$*
2. $\underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n$.

Ce théorème est considéré comme admis mais il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 1.44.

*Démonstration.* $1 \Rightarrow 2$ Si on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\alpha$, alors on sait que tout toute suite aura même limite et donc $Adh_{\overline{\mathbb{R}}}(u_n) = \{\alpha\}$. En utilisant le théorème 1.44, on se rend compte que d'une part

$$\limsup u_n = \max Adh_{\overline{\mathbb{R}}}(u_n) = \max(\{\alpha\}) = \alpha$$

et que d'autre part

$$\liminf u_n = \min Adh_{\overline{\mathbb{R}}}(u_n) = \min(\{\alpha\}) = \alpha.$$

Donc les limites inférieures et supérieures sont égales.

$2 \Rightarrow 1$ On suppose maintenant que les limites inférieures et supérieures sont égales à un certain $\alpha$ appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$. Avec les notations usuelles, on sait que

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} s_n = \alpha \\ \lim_{n\to+\infty} i_n = \alpha \\ \text{Pour tout } n,\ i_n \leqslant u_n \leqslant s_n \end{cases}$$

Il suffit donc d'utiliser le théorème d'encadrement pour conclure que la suite $(u_n)_n$ est convergente (vers $\alpha$).

□

**Corollaire 1.49.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *telle que* $\overline{\lim}\, u_n \leqslant \underline{\lim}\, u_n$*, alors la suite est convergente dans* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

*Démonstration.* On suppose que $\overline{\lim}\ u_n \leqslant \underline{\lim}\ u_n$. Puisque $\overline{\lim}\ u_n \geqslant \underline{\lim}\ u_n$ est toujours vrai, on a donc l'égalité entre les limites inférieures et supérieures et on peut appliquer le théorème 1.48. □

Chapitre

# 2 Séries numériques à valeurs réelles

Objectifs : Etude d'une série pas trop compliquée en appliquant les règles présentées dans ce chapitre

- test de divergence grossière
- règles de comparaison et d'équivalence pour les séries à termes positifs
- règles de Riemann, de Cauchy et de d'Alembert
- critère usuel des séries alternées
- calcul du rayon de convergence d'une série entière

Mot clés : séries positives, série semiconvergente, série absolument convergente

## 2.1 Séries numériques : vocabulaire et propriétés fondamentales

### 2.1.1 Définition

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on considère une nouvelle suite réelle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dite suite des *sommes partielles* de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

1. $S_0 = a_0$,
2. $S_1 = a_0 + a_1$,
3. $S_2 = a_0 + a_1 + a_2$,
4. ...,
5. $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

$(a_n)$ est le *terme général* de la série $\sum a_n$.

**Remarque 2.1.** *Si la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est définie uniquement à partir de $n_0 \in \mathbb{N}$, alors on définit les sommes partielles à partir de l'étape $n_0$ : pour tout $n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$.*

**Définition 2.2.** On dit que la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle. Dans ce cas, on note $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim S_n.$$

Si la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

**Remarque 2.3.** *Si on considère une suite $(S_n)$ quelconque, par exemple $S_n = n(-1)^n$, on peut remarquer qu'il est possible de l'interpréter comme une série, il s'agit en effet de la série des $(a_n)$ où $a_0 = S_0$, $a_1 = S_1 - S_0$, $a_2 = S_2 - S_1$, ...Tout ce chapitre pourrait se traiter sans avoir besoin du vocabulaire des séries. En résumé "Une suite est une série et une série est une suite." Si on traite ce chapitre, c'est qu'il existe un certain nombre de techniques permettant d'obtenir la convergence de la suite des somme partielles $(S_n)$.*

### 2.1.2 Exemples

**Série de terme général arithmétique** $(a + bn)_{n\geqslant 1}$

**Série de terme général harmonique** $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$

Attention la suite n'est pas définie pour $n = 0$.

On a vu en TD que $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$. Donc la série est divergente.

**Série de terme général (t.g.)** $(\frac{1}{n^2})_{n\geqslant 1}$

La suite $T_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k^2})$ est croissante et majorée (somme télescopique cf. TD). Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$.

En fait, on peut montrer que (c'est toutefois difficile)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Séries de terme général géométrique** $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $q \in \mathbb{R}$

Lorsque $q \neq 1$, on a une expression explicite des sommes partielles :

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Comme on a une forme explicite, on peut faire une étude directe :

1. si $|q| < 1$, alors $|q|^n$ converge vers 0 et donc $q^n \to 0$. Ainsi $S_n$ converge vers $\frac{1}{1-q}$.
2. si $|q| > 1$, alors la suite $q^n$ est non bornée, donc $q^n$ diverge dans $\mathbb{R}$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
3. si $q = 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1$. La suite des sommes partielles ne converge pas.
4. si $q = -1$ alors

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= 0 \\ S_2 &= 1 + (-1) + 1 = 1 \\ \ldots &= \ldots \\ S_n &= \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

En fait, on utilise souvent l'abus de langage qui consiste à parler de série géométrique pour série de terme général géométrique.

### 2.1.3 Propriétés générales : comportement à l'infini

**Proposition 2.4.** *(Condition nécéssaire de convergence) Si la série de terme général* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge alors* $a_n \to 0$.

*Démonstration.* Par définition, la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors

$$S_n \to_{n\to+\infty} \ell$$

De plus, si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n := S_{n+1}$ alors ($(T_n)$ étant une suite extraite)

$$T_n := S_{n+1} \to_{n\to+\infty} \ell$$

On en déduit par règle de calcul sur les limites que $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ converge vers $\ell - \ell = 0$. $\square$

**Corollaire 2.5** (Test de divergence grossière)**.** *Soit une série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. On dit alors qu'elle diverge* grossièrement.

**Exemple 2.6.** *Ce n'est pas une condition suffisante comme le montre la série harmonique de terme général $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ qui diverge (preuve faite en cours en utilisant le critère de Cauchy).*

On prouve maintenant deux propositions qui montrent que la nature d'une série ne dépend pas du comportement des premier termes.

**Proposition 2.7.** *La propriété de convergence d'une série est une propriété asymptotique, dit autrement on a l'équivalence*

1. *La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente ;*
2. *pour tout $N$, la série $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ est convergente ;*
3. *il existe $N$ tel que la série $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ soit convergente.*

**Définition 2.8.** On dit que deux séries sont de *même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

**Proposition 2.9.** *On considère deux séries de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_n = b_n$ alors la série de terme général $(a_n)$ et la série de terme général $(b_n)$ sont de même nature.*

## 2.2 Séries à termes positifs

On va étudier plus particulièrement ici le cas des séries dont le terme général est positif :

### 2.2.1 Définition

On dit que la série de terme général $(a_n)_n$ est une série à termes positifs si

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [0, +\infty[.$$

**Proposition 2.10.** *La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à une série à termes positifs est positive et croissante. En particulier, elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On distingue deux cas :*

1. *si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors la limite est réelle et on dit que la série* converge.
2. *si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, on dit que la série* diverge.

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$, par définition des sommes partielles, on a

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$$

Donc la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à termes positifs (car $S_0 = a_0 \geqslant 0$). Elle converge donc dans $\overline{\mathbb{R}}$ (cf chapitre 1).

De plus, si la limite est réelle, le théorème de convergence implique que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$

$\square$

### 2.2.2 Importance des séries à termes positifs

Une façon de se ramener au cas des séries à termes positifs est de passer en valeur absolue.

**Définition 2.11.** La série de t.g. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite absolument convergente si la série de t.g. $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Une série de terme générale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente mais pas absolument convergente est dite semi convergente.

Dans ce cas d'une série à termes positifs, il y a équivalence entre être absolument convergente et être convergente car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = a_n$.

**Théorème 2.12.** *Si la série de t.g. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente alors elle est convergente et*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|. \tag{2.1}$$

*Démonstration.* On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ la suite des sommes partielle d'ordre $n$ associées à la suite $(a_k)_k$. L'objectif est de montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall p > q \geqslant n_0,\ |S_p - S_q| \leqslant \varepsilon.$$

Par hypothèse, la suite $T_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ est convergente donc c'est une suite de Cauchy. On va appliquer ceci pour un $\varepsilon > 0$ fixé, donc il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p > q \geqslant N_\varepsilon,\ |T_p - T_q| \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui peut se reformuler comme

$$\forall p > q \geqslant N_\varepsilon,\ \sum_{k=q+1}^{p} |a_k| \leqslant \varepsilon.$$

Or on a l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{k=q+1}^{p} a_k\right| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} |a_k| \leqslant \varepsilon.$$

Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy puisqu'il suffit de considérer $n_\varepsilon = N_\varepsilon$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (donc également $(|S_n|)_{n\in\mathbb{N}}$)

Il reste à prouver l'inégalité (2.1) mais c'est immédiat car pour tour $n$, $|S_n| \leqslant T_n$. Puisque les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(|S_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|T_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il suffit de passer à la limite.

$$\left|\lim_{n\to\infty} S_n\right| = \lim_{n\to\infty} |S_n| \leqslant \lim_{n\to\infty} T_n$$

□

Le résultat sur les séries absolument convergentes met en valeur l'intérêt des séries dont chaque terme est positif. De plus leur étude est relativement plus simple que les séries quelconques. On va donner plusieurs règles qui permettent de prouver la convergence.

### 2.2.3 Critère de comparaison

**Principe de comparaison des séries à termes positifs**

**Proposition 2.13.** *(Principe de comparaison) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant w_n$$

*alors*

*1. Si $\sum w_k$ (notation pour la série de t.g. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converge alors $\sum u_k$ converge.*

*2. Si $\sum u_k$ diverge alors $\sum w_k$ diverge.*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que 2) est la contraposée de 1), les deux résultats sont donc équivalents et il suffit de démontrer l'un des des deux, par exemple 1).

On suppose que la série de terme général, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on démontre que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en trois étapes :

1. on remarque que la série de terme général $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ converge,
2. on déduit que la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge,
3. on en déduit que la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

D'après la proposition sur la suppression des termes d'une série, la série de terme général $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ converge.

Déduisons le second résultat. On pose $(S'_n)_{n\geqslant n_0}$ la suite de sommes partielles associée à la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Rappelons que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$S'_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On en déduit que

$$S'_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} w_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} w_k < +\infty.$$

La suite $(S'_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée donc convergente dans $\mathbb{R}$. La série de terme général $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente.

D'après la proposition sur la suppression des termes d'une série, on en déduit que la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. □

**Exemple 2.14.** *Soit la série de terme général $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geqslant 1}$ alors pour tout $n \geqslant 1$,*

$$\frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

*Or la série de terme général $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge donc la série de terme général $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.*

**Exemple 2.15.** *Soit la série de terme général $(y_n)_{n\geqslant 1}$ définie par pour tout $n \geqslant 1$,*

$$y_n = \frac{\cos(\sin(\exp(n))) - 3}{n^2}$$

*Alors pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant y_n \leqslant \frac{4}{n^2}$. Donc la série de terme général $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge absolument, donc la série de terme général $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge.*

**Exemple 2.16.** *(Série de Riemann) Soit $\alpha \in ]0, +\infty[$, on considère la série de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ alors*

*1. si $\alpha \in ]0, 1]$ alors*

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

*Comme la série de terme général $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge.*

*2. si $\alpha \geqslant 2$ alors*

$$\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

*Comme la série de terme général $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.*

*3. si $\alpha \in ]1,2[$ : on ne peut pas répondre pour le moment.*

**Exemple 2.17.** *Attention : critère valable uniquement pour des séries à terme positifs et il importe d'expliquer ce point dans les copies. Soient les deux séries de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = -1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 0.$$

*Alors la série de terme général $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et pourtant $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On finit par un résultat un peu plus théorique qui va servir dans les preuves suivantes.

**Corollaire 2.18.** *Soit une série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle qu'il existe $c > 0$ et $q \in ]0,1[$ avec*

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant cq^n.$$

*Alors la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente.*

### Principe d'équivalence

**Définition 2.19.** On dit que deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si

1. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $x_n \neq 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1.$$

2. ou il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $y_n \neq 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1.$$

On le note $x_n \sim y_n$.

Cela définit une relation d'équivalence sur les suites non nulles à partir d'un certain rang. Culture générale : une relation d'équivalence est une relation telle que

1. $x_n \sim x_n$ (réfléxivité),
2. si $x_n \sim y_n$ alors $y_n \sim x_n$ (symmétrie),
3. si $x_n \sim y_n$ et $y_n \sim z_n$ alors $x_n \sim z_n$ (transitivité).

**Remarque 2.20.** *On utilise souvent utiliser les développement limités pour déterminer les équivalents.*

**Proposition 2.21.** *Soient deux séries de terme général positif $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes. Alors la série de t.g. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de t.g. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

## 2.3 Règles usuelles

### 2.3.1 Règle de Riemann

**Proposition 2.22.** *On considère une série de terme général positif* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. On suppose que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède un équivalent de la forme* $(K/n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ *alors*

1. *si* $\alpha > 1$ *alors la série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
2. *si* $\alpha \leqslant 1$ *alors la série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

La proposition sera une conséquence du paragraphe sur la comparaison entre série et intégrale (voir page 20).

### 2.3.2 Règle de d'Alembert

On commence par énoncer le cas positif sachant que dans la pratique, on peut passer en valeur absolue pour se ramener à ce cas.

**Proposition 2.23.** *On considère une série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *strictement positif. On considère une série à t.g. positif* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Si la suite auxiliaire* $(z_n)_n = (x_{n+1}/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède une limite* $\ell$ *alors*

1. *si* $\ell < 1$ *alors la série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
2. *si* $\ell > 1$ *alors la série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge grossièrement.*

*Démonstration.* On suppose d'abord que $\ell < 1$. Pour tout $q \in ]\ell, 1[$, puisque $\lim z_n < q$, il existe $N_q \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant N_q$, $z_n \leqslant q$ et donc $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant q x_n$.
Par une récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \geqslant N_q$,

$$x_n \leqslant x_{N_q} * q^{n-N_q}.$$

Comme $q < 1$, il suffit alors d'appliquer le corollaire 2.18.

Supposons maintenant que $\ell > 1$ : preuve similaire.

□

**Exemple 2.24.** *Attention, si* $\ell = 1$*, on ne peut conclure. En effet,*

1. *la série de t.g.* $x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ *diverge alors que* $\ell = 1$ *;*
2. *la série de t.g.* $x_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)^n$ *converge alors que* $\ell = 1$*.*

**Exemple 2.25.** *Soit* $x$ *un paramètre fixé, la règle de d'Alembert est inapplicable directement pour la série de t.g.*

$$u_n = \begin{cases} \frac{x^p}{p!} & \text{si } p \text{ ppremier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 2.26.** *Soit* $x$ *un paramètre fixé, la série de t.g.* $u_n = \frac{x^n}{n!}$ *est absolument convergente donc convergente d'après la règle de d'Alembert. Ce qui permet de traiter par comparaison l'exemple précédent.*

Une analyse de la preuve de la règle de d'Alembert montre qu'il existe une version plus générale

**Proposition 2.27.** *On considère une série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *strictement positif. On considère une série à t.g. positif* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Soit* $\ell = \overline{\lim}\ z_n$ *où* $(z_n)_n = (x_{n+1}/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Si* $\ell < 1$ *alors la série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

### 2.3.3 Règle de Cauchy

On commence par énoncer le cas positif sachant que dans la pratique, on peut passer en valeur absolue pour se ramener à ce cas.

**Proposition 2.28.** *On considère une série à t.g. positif* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Si la suite auxiliaire* $(y_n)_n = (x_n^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ *possède une limite* $\ell$ *alors*

1. *si* $\ell < 1$ *alors la série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
2. *si* $\ell > 1$ *alors la série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge grossièrement.*

*Démonstration.* On suppose d'abord que $\ell < 1$. Pour tout $q \in ]\ell, 1[$, puisque $\lim y_n < q$, il existe $N_q \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant N_q$, $y_n \leqslant q$ et donc $0 \leqslant x_n \leqslant q^n$.

Comme $q < 1$, la série de t.g. $q^n$ converge. D'après le principe de comparaison la série de t.g. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Supposons maintenant que $\ell > 1$. Pour tout $q \in ]1, \ell[$, puisque $\lim y_n > q$, il existe $N_q \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant N_q$, $y_n \geqslant q$ et donc $x_n \geqslant 1$ et donc la série de t.g. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement.

□

**Exemple 2.29.** *Le critère de Cauchy est inapplicable pour les séries de Riemann, en effet*

1. *La série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *diverge alors que* $\ell = 1$.
2. *La série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge alors que* $\ell = 1$.

Là encore, il existe une version plus générale.

**Proposition 2.30.** *On considère une série de terme général* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On considère* $\ell = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|x_n|})_{n\in\mathbb{N}}$. *Si* $\ell < 1$ *alors la série de t.g.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge absolument.*

### 2.3.4 Comparaison série-intégrale

Lorsque la série à étudier est de la forme $(u_n)_{n>0} = (f(n))_{n>0}$ et lorsque la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ est continue et décroissante, il est facile de comparer le terme général de cette sérieavec une intégrale (voir figure 2.1).

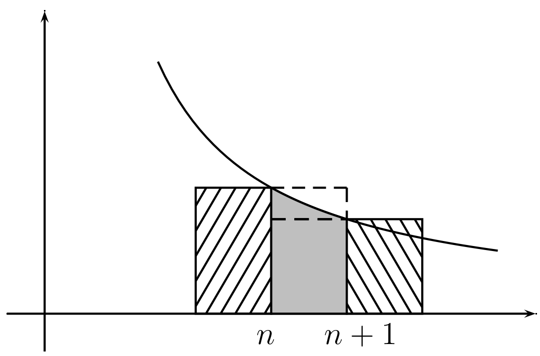


FIGURE 2.1 – $f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(u)\,du \leqslant f(n)$

Si on applique cette idée on peut écrire $f(2) \leqslant \int_1^2 f(u)\,du \leqslant f(1)$ mais également $f(3) \leqslant \int_1^2 f(u)\,du \geqslant f(2)$ donc $f(2) + f(3) \leqslant \int_1^3 f(u)\,du \leqslant f(1) + f(2)$ et de proche en proche,

$$f(2) + \ldots + f(n+1) \leqslant \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(1) + \ldots + f(n)$$

Ce qui peut s'écrire $S_n + f(n+1) - f(1) \leqslant \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant S_n$. Donc,

- si $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt = +\infty$ alors la série diverge.
- si $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt = \ell$ (limite finie), la série converge. En effet, puisqu'il s'agit d'une série à termes positif, pour montrer que la série converge, il suffit de remarquer que les sommes partielles sont majorées.

**Application aux séries de Riemann**

**Exemple 2.31.** *Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \neq 1$ et $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. On peut considérer $\varphi(x) = \int_1^x f(u)\,du$, ($\varphi$ est la primitive de $f$ sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 1 ) :*

$$\varphi(x) = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1. \tag{2.2}$$

$$\varphi(x) = \ln(x) \text{ si } \alpha = 1. \tag{2.3}$$

*En particulier $\varphi(x)$ possède dans $\mathbb{R}$ une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $1-\alpha < 0$. On retrouve la conclusion déjà énoncée dans la proposition 2.22.*

1. *si $0 < \alpha < 1$ alors la série de t.g. $(\frac{1}{n^\alpha})_{n\geqslant 1}$ diverge.*
2. *si $\alpha > 1$ alors la série de t.g. $(\frac{1}{n^\alpha})_{n\geqslant 1}$ converge.*
3. *si $\alpha = 1$ la série diverge,*
4. *si $\alpha \leqslant 0$ la série diverge grossièrement.*

**Exemple 2.32.**

1. $y_n = \frac{ln(n)}{n^2}$,
2. $x_n = \frac{1}{ln(n)\sqrt(n)}$,
3. $z_n = \frac{1}{nln(n)}$.

## 2.4 Importance de l'ordre de sommation

Il peut être tentant de sommer les termes d'une série dans un ordre pour lequel le calcul est plus simple. L'objectif de cette partie est d'appeler à la plus grande prudence.

### 2.4.1 Une erreur possible

Considérons la série harmonique alternée dont la convergence a été étudiée en TD (elle sera également prouvée ultérieurement dans ce cours).
Avec la notation usuelle de la somme partielle

$$S_n = -1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}.$$

On appelle $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

$$S = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \ldots$$

On est tenté de remarquer que

$$2S = -2 + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \frac{2}{5} + \frac{2}{6} - \frac{2}{7} + \frac{2}{8} - \frac{2}{9} + \frac{2}{10} - \frac{2}{11} + \frac{2}{12} - \frac{2}{13} + \frac{2}{14} + \ldots$$

Mais si on simplifie les fractions, on peut écrire (2.1) et on peut alors être tenté de réorganiser les termes en les classant par leur dénominateur. Concrètement les termes verts sont inchangés, les termes rouges sont écrits un peu plus tard, les termes un peu plus tôt et on a laissé en noir les termes qui apparaîtront plus tard et qui ne sont pas explicitement présent dans la deuxième écriture.

$$2S = -2 + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{2}{9} + \frac{1}{5} - \frac{2}{11} + \frac{1}{6} - \frac{2}{13} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$2S = -2 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$2S = -2 + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{2}{9} + \frac{1}{5} - \frac{2}{11} + \frac{1}{6} - \frac{2}{13} + \frac{1}{7} + \dots \tag{2.4}$$

$$2S = -2 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \dots \tag{2.5}$$

On peut alors regrouper les termes en les simplifiant.

$$2S = (-2+1) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{6} + \left(-\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) + \dots \tag{2.6}$$

On reconnait alors l'expression de $S$

$$2S = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots = S$$

On a ainsi "démontré" que $2S$ était égal à $S$, donc que $S = 0$ ce qui est impossible car $S < -1/2$. La VRAIE valeur de $S$ est $-\ln 2$.

$$S = \left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \dots < \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \tag{2.7}$$

### 2.4.2 Une relecture de notre erreur

**Définition 2.33.** On appelle permutation de $\mathbb{N}$ toute bijection de $\mathbb{N}$.

L'erreur se situe au niveau de l'équation (2.5) tandis que l'équation (2.4) est valide. Le terme de gauche ne vaut pas $2S$ mais une certaine valeur que nous appellerons $2T$.

$$T = -2 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \dots \tag{2.8}$$

Dès lors, l'équation suivante (2.9) est également fausse et doit être modifié

$$2T = (-2+1) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{6} + \left(-\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) + \dots = S \tag{2.9}$$

Dès lors, on ne peut plus calculer $S$.

**ON N'A PAS LE DROIT DE RÉORGANISER LES TERMES EN UTILISANT UNE PERMUTATION SANS PRÉCAUTIONS.**

Attention, on parle ici de permutation puisque les termes ne sont appelés dans l'ordre initial mais dans un nouvel ordre (voir table 2.1), et on étudiera plus tard la question du regroupement des termes consécutifs (voir le paragraphe 2.5).
Comme il y a une dissymétrie, on peut rajouter le terme $a_0 = 0$. L'étude des premiers termes nous a permis de comprendre l'allure générale de la permutation $\sigma$ (voir table 2.2). Il est facile de vérifier que $\sigma$ est une permutation (voir table 2.3) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ pour laquelle $T = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} \neq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$. On a même ici $T = 2S$.

**PAR CONTRE, ON A TOUJOURS LE DROIT DE PERMUTER UN NOMBRE FINI DE TERMES.**

Ce qui signifie par exemple dans le cas d'un échange entre les termes au rang 1 et 3 que les séries $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + a_4 + \dots$ et $(a_0 + a_3 + a_2 + a_1) + a_4 + \dots$ sont de même nature et auront même somme si cette somme a un sens (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\overline{\mathbb{R}}$).

| $n$ | $a_n$ dans (2.4) | $a_{\sigma(n)}$ dans (2.5) | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $-2$ | $-2$ | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | $-2/3$ | $1/2$ | 4 |
| 4 | $1/2$ | $-2/3$ | 3 |
| 5 | $-2/5$ | $1/3$ | 6 |
| 6 | $1/3$ | $1/4$ | 8 |
| 7 | $-2/7$ | $-2/5$ | 5 |
| 8 | $1/4$ | $1/5$ | 10 |
| 9 | $-2/9$ | $1/6$ | 12 |
| 10 | $1/5$ | $-2/7$ | 7 |
| 11 | $-2/11$ | $1/7$ | 14 |
| 12 | $1/6$ | $1/8$ | 16 |
| 13 | $-2/13$ | $-2/9$ | 9 |
| 14 | $1/7$ | $1/9$ | 18 |
| ... | ... | ... | ... |

TABLE 2.1 – Ordre d'appel dans la série modifiée $2S$

| $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|
| $3n$ | $4n$ |
| $3n+1$ | $2n+1$ |
| $3n+2$ | $4n+2$ |

TABLE 2.2 – Description de la permutation

### 2.4.3 Les résultats sur les permutations de séries

On mentionne ici des résultats que l'on peut considérer comme hors programme mais qui éclairent la difficulté des permutations de séries. On a un résultat "positif" (ce qu'on a le droit de faire) et un résultat "négatif" (ce qu'on n'a pas le droit de faire).

**Théorème 2.34.** *On suppose que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente. Soit $\sigma$ une permutation de $\mathbb{N}$. Alors*

1. *la série de terme général $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est également absolument convergente,*
2. *On a l'égalité*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

*Démonstration.* Admis □

**Théorème 2.35.** *On suppose que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est semi-convergente.*

| $n$ | $\sigma^{-1}(n)$ |
|---|---|
| $4n$ | $3n$ |
| $4n+1$ | $6n+1$ |
| $4n+2$ | $3n+2$ |
| $4n+3$ | $6n+3$ |

TABLE 2.3 – Description de la permutation réciproque

*Alors pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe $\sigma$ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$$

*Démonstration.* Admis ☐

Si on prend le cas de la série harmonique alternée $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n>0}$, on a "vu" une permutation (définie de façon explicite) telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = S/2$ mais on sait qu'on pourrait construire une autre permutation $\tau$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\tau(n)} = 2022$. On peut même envisager une permutation $\gamma$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\gamma(n)} = -\infty$.

## 2.5 Sommation par paquets

### 2.5.1 Vocabulaire et position du problème

Il s'agit d'une technique qui vise à regrouper des termes consécutifs (faire un paquet). On découpe la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en "paquets". On considère une suite strictement croissante d'entiers $n_0 < n_1 < \ldots$ et on pose

$$\left\{\begin{array}{lcl} b_0 & = & a_0 + a_1 + \ldots + a_{n_0} \\ b_1 & = & a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots + a_{n_1} \\ & \ldots & \\ b_k & = & a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k} \\ & \ldots & \end{array}\right.$$

On peut alors considérer $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les sommes partielles associées :

$$\left\{\begin{array}{llll} T_0 & = b_0 & = S_{n_0} & = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n_0} \\ T_1 & = b_0 + b_1 & = S_{n_0} & = a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots + a_{n_1} \\ & \ldots & & \\ T_k & = b_0 + b_1 + \ldots + b_k & = S_{n_k} & = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k} \\ & \ldots & & \end{array}\right.$$

La problématique est de savoir si $S = T$ en posant $S$ et $T$ les limites respectives de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dit autrement, peut-on écrire que $\sum a_n = \sum b_n$.

$$a_0 + \ldots + a_n + \ldots = (a_0 + \ldots + a_{n_0}) + (a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_1}) + \ldots + (a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}) + \ldots$$

C'est ce que l'on a fait dans l'équation (2.9).

$$T = (-2+1) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{6} + \left(-\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) + \ldots$$

$$T = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots = S$$

### 2.5.2 Les cas licites

**Proposition 2.36.** *Si la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (y compris dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'ailleurs) alors la série de terme général $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et elles auront même somme.*

En effet, la suite $(T_n)$ apparait comme une sous suite de la suite convergente $(S_n)$ et donc elles auront même limite.

**Proposition 2.37.** *Si la série de terme général $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, si les paquets sont de taille bornée (si $(n_{k+1}-n_k)$ est borné) et si $a_n \to 0$, alors la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et elles auront même somme.*

Les hypothèses de ce cas sont bien vérifiées dans l'équation (2.9) puisqu'il s'agit de paquets de taille constante.

### 2.5.3 Les cas manifestement illicites

Si on prend $a_n = (-1)^n$ et le découpage $n_k = 2k+1$, on obtient que $b_k = a_{2k}+a_{2k+1} = 1-1 = 0$ et il est FAUX (au sens que le terme de gauche n'a aucun sens) d'écrire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n = (1-1)+(1-1)+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Plus généralement si le terme général $a_n \not\to 0$, alors la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente même si la série de terme général $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On peut même concevoir des exemples plus élaborés où on a à la fois $a_n \to 0$, la série de terme général $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente mais la série de terme général $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente. Il suffit de considérer la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ définie par

$$\begin{cases} a_3 = 1,\ a_4 = -1, \\ a_5 = a_6 = \frac{1}{2},\ a_7 = \ a_8 = -\frac{1}{2} \\ a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = \frac{1}{4},\ a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = -\frac{1}{4} \\ a_{17} = \ldots = a_{24} = \frac{1}{8},\ a_{25} = \ldots = a_{32} = -\frac{1}{8} \\ \ldots \end{cases}$$

Si on utilise le découpage $n_k = 2^{k+2}$

$$\begin{cases} b_0 & = a_3 + a_4 & = 0, \\ b_1 & = a_5 + \ldots + \ a_8 & = 0, \\ b_2 & = a_9 + \ldots + \ a_{16} & = 0, \\ b_3 & = a_{17} + \ldots + \ a_{32} & = 0, \\ \ldots \end{cases}$$

Il suffit de remarquer que $S_3 = S_6 = S_{12} = S_{24} = \ldots = 1$ tandis que $S_2 = S_4 = S_8 = S_{16} = \ldots = 0$.

### 2.5.4 Le critère usuel sur les suites alternées

Une suite $(a_n)$ est dite alternée si la suite $((-1)^n a_n)$ garde un signe constant, par exemple la suite harmonique alternée. On note comme précédemment, $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de terme général $(a_n)_n$, $S_n = a_0 + \ldots + a_n$.
Pour simplifier, on va se limiter dans l'étude d'une série alternée au cas où $a_n = (-1)^n|a_n|$ et où la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On fait tout d'abord simplement des paquets de longueur 2.

$$\begin{cases} b_0 & = & a_0 + a_1 \\ b_1 & = & a_2 + a_3 \\ & \ldots & \\ b_k & = & a_{2k} + a_{2k+1} \\ & \ldots & \end{cases}$$

Si la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garde un signe constant puisque $b_k = |a_{2k}| - |a_{2k+1}| \geqslant 0$. Dit autrement, la sous-suite des termes pairs $(S_{2n})$ de la suite des sommes partielles est croissante.

Mais si on s'intéresse au découpage alternatif

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_0 & = & a_0 \\ c_1 & = & a_1 + a_2 \\ & \dots & \\ c_k & = & a_{2k-1} + a_{2k} \\ & \dots & \end{array}\right.$$

alors la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à terme négatifs à partir du rang 1, puisque $c_k = -|a_{2k-1}| + |a_{2k}| \leqslant 0$. Dit autrement, la sous-suite des termes impairs $(S_{2n+1})$ de la suite des sommes partielles est décroissante. Et donc les sous-suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ seront des suites adjacentes si $a_n \to 0$.

**Proposition 2.38.** *Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée et la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers $0$ alors la série de terme général $(a_n)$ est convergente.*

### 2.5.5 La formule d'Abel

Le résultat sur les séries alternés s'obtient également à l'aide de la formule d'Abel qui ne sera pas présentée ici. On peut généraliser sous la forme suivante :

**Théorème 2.39** (Dirichlet ou Abel-Dirichlet)**.** *On suppose que la série de terme général $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut se mettre sous la forme : $t_n = u_n w_n$ tel que*

1. *$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers $0$,*
2. *la suite $(U_n)$ de sommes partielles associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée*

*alors la série de terme général $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

*Démonstration.* Admis □

**Corollaire 2.40.** *Soit $(x_n)$ une suite alternée. Si la suite $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers $0$ alors la série de terme général $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

**Lemma 2.41.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers $0$ et $\theta \in ]0, 2\pi[$, alors les suites $(U_n) = (\sin(0) + \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \ldots + \sin(n\theta))$ et $(\tilde{U}_n) = (\sin(0) + \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \ldots + \sin(n\theta))$ sont des suites bornées.*

La preuve du lemme a été faite en cours. Il suffit ensuite alors d'appliquer le théorème d'Abel-Dirichlet pour obtenir par exemple

**Théorème 2.42.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers $0$ et $\theta \in ]0, 2\pi[$, alors la série trigonométrique $\sum a_n \sin(n\theta)$ converge. Dit autrement la suite $X_n$ définie par*

$$X_n = a_0 \sin(0) + a_1 \sin(\theta) + a_2 \sin(2\theta) + \ldots + a_n \sin(n\theta)$$

*converge.*

Par exemple, on peut en déduire que il existe $\ell$ tel que

$$\sin(1) + \frac{\sin(2)}{2} + \ldots + \frac{\sin(n)}{n} \to \ell$$

## 2.6 Série entière

### 2.6.1 Définitions et premiers exemples

**Définition 2.43.** Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite donnée de nombres réels, On appelle série entière associée, la série numérique de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $x$ est un nombre réel. On la note parfois s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté $\sum a_n x^n$.

**Remarque 2.44.** *Attention, l'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ contient une d'ambiguïté au point $x = 0$. Il est INTERDIT d'écrire $0$ à la puissance $0$. En fait, il vaudrait mieux écrire $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Ce serait plus rigoureux mais très pénible, aussi on va conserver l'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en ayant en tête la convention que le premier terme de la série est la constante $a_0$ et non pas $a_0 x^0$.*

**Définition 2.45.** Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on désigne par $D_{(a_0,a_1\dots)}$ ou $D_a$ le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$

$$D_a = \{x \in \mathbb{R},\ \text{la série numérique } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ est convergente}\}$$

**Remarque 2.46.** *Le point $0$ est toujours un élément de $D_a$.*

**Exemple 2.47.**
- *S'il existe $n^* \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n^*$, $a_n = 0$ alors $D_a = \mathbb{R}$.*
- *Le domaine de convergence de $\sum n!x^n$ est $D = \{0\}$.*
- *Le domaine de convergence de $\sum x^n/n!$ est $D = \mathbb{R}$.*
- *Si $a_0 = 1 = a_1 = \dots$, alors le domaine de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est $D = ]-1, 1[$.*

### 2.6.2 Rayon de convergence

**Théorème 2.48.** *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Il existe un élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$, noté $R_a$ tel que le domaine de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ soit de l'une des formes suivantes*
- $D_a = ]-R_a, R_a[$ ;
- $D_a = ]-R_a, R_a]$ ;
- $D_a = [-R_a, R_a[$ ;
- $D_a = [-R_a, R_a]$ ;

**Remarque 2.49.** *Par définition de la borne sup, on a toujours $R_a = \sup(D_a)$ et cet élément est appelé rayon de convergence de la série entière.*

Pour des raisons liés à l'étude des séries sur $\mathbb{C}$, on utilise parfois le vocabulaire suivant
- à l'intérieur du disque de convergence pour $x \in ]-R_a, R_a[$,
- à l'extérieur du disque de convergence si $x < -R_a$, ou si $x > R_a$,
- sur le bord du disque de convergence si $x = -R_a$, ou si $x = R_a$.

pour désigner ces trois type de cas.

**Exemple 2.50.** *On peut revisiter les exemples précédents.*
- — *On peut calculer le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} n!z^n$ qui vaut $R = 0$, ce qui est cohérent avec $D = \{0\}$.*
- — *On peut calculer le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ qui vaut $R = 1$, ce qui est cohérent avec $D = ]-1, 1[$.*
- — *On peut calculer le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n/(n!)$ qui vaut $R = +\infty$, ce qui est cohérent avec $D = \mathbb{R}$.*

### 2.6.3 Méthode de calcul du rayon de convergence

*Remarque* 1. Dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$, on utilise parfois la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$. Bien entendu, cette convention n'a pas de sens dans $\overline{\mathbb{R}}$.

En appliquant la règle de Cauchy, on montre :

**Théorème 2.51.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}^+$, alors le rayon de convergence est $R = \frac{1}{\ell}$. et si $z \in \mathbb{R}$*
- *si $|z| < R$ alors la série entière $\sum a_n z^n$ est* **absolument** *convergente.*
- *si $|z| = R$, alors tout peut arriver.*

- *si* $|z| > R$ *alors la série entière* $\sum a_n z^n$ *est divergente.*

**Remarque 2.52.** *La véritable formulation consiste à utiliser*

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}^+,$$

*et dans ce cas, le rayon de convergence est (compte-tenu de la convention) l'inverse* $R = 1/\ell$.

**Remarque 2.53.** *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite et* $N_0$ *un entier. On considère la suite* $(b_n)_n = (|a_n|)_n$ *et* $(c_n)_n$ *défini par* $c_0 = 0 = \ldots = c_{N_0-1}$ *puis par* $c_n = a_n$ *si* $n \geqslant N_0$*, alors les trois séries entières ont même rayon de convergence. Dit autrement, les séries* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$*,* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n$ *et* $\sum_{n=N_0}^{+\infty} a_n z^n$ *ont même rayon de convergence.*

**Corollaire 2.54.** *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. On suppose qu'il existe* $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ *tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$m \leqslant |a_n| \leqslant M,$$

*alors* $R = 1$.

En appliquant la règle de d'Alembert, on montre :

**Théorème 2.55.** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière. On suppose qu'il existe* $n_0$ *telle que pour tout* $n \geqslant n_0$*,* $a_n \neq 0$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}^+$$

*alors "*$R = \frac{1}{\alpha}$*".*

Chapitre

# 3 Intégrale

Le but de ce chapitre est de construire l'intégrale d'une fonction : $\int f$ est l'aire algébrique entre l'axe et la courbe (aire positive si au dessus de la courbe et négative si en dessous)
Comment ? On va encadrer cette aire par dessus et par en dessous.

## 3.1 Fonction intégrable et intégrale

### 3.1.1 Definition

Soit $a < b \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}_b([a,b])$ l'ensemble des fonctions bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

**Définition 3.1.** On appelle subdivision d'un segment $[a,b]$ toute suite finie $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ telle que

$$x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b.$$

**Exemple 3.2.** *Soit $a \leqslant b$ et pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, $x_i = a + \frac{(b-a)}{n} i$ alors $\sigma = (x_1, ..., x_n)$ est une subdivision de $[a,b]$.*

**Définition 3.3.** Soit $f \in \mathcal{F}_b([a,b])$ et $\sigma$ une subdivision de $[a,b]$, on note

$$I^-(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{t \in ]x_i, x_{i+1}[} f(t)(x_{i+1} - x_i),$$

et

$$I^+(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{t \in ]x_i, x_{i+1}[} f(t)(x_{i+1} - x_i).$$

**Remarque 3.4.** *Si $\int f$ est l'aire algébrique, on devrait avoir*

$$I^-(f,\sigma) \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant I^+(f,\sigma).$$

**Remarque 3.5.**

- *Comme $f$ est bornée sur $[a,b]$, les infimums et les supremums sont des nombres réels ainsi $I^*(f,\sigma)$ est un nombre réel.*
- *Pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$,*

$$\inf_{t \in ]x_i, x_{i+1}[} f(t) \leqslant \sup_{t \in ]x_i, x_{i+1}[} f(t),$$

*donc $I^-(f,\sigma) \leqslant I^+(f,\sigma)$.*

**Exemple 3.6.** *Dessin*

**Définition 3.7.** Soit $f \in \mathcal{F}_b([a,b])$, on définit

$$I^-(f) = \sup_{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]} I^-(f,\sigma),$$

et

$$I^+(f) = \inf_{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]} I^+(f,\sigma).$$

On dit que $f$ est Riemann-intégrable si $I^-(f) = I^+(f)$. On note par $\mathcal{R}([a,b])$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b(f) = I^-(f) = I^+(f)$.

**Remarque 3.8.** *La définition de l'intégrale est l'ensemble des définitions* 2 *et* 3*. Dans la suite on omettera de préciser "Riemann".*

### 3.1.2 $I^-(f) \leqslant I^+(f)$

**Proposition 3.9.** *Pour tout $f \in \mathcal{F}_b([a,b])$, on a $I^-(f) \leqslant I^+(f)$ ;*

Afin de démontrer cette proposition, on commence par prouver le lemme suivant

**Lemma 3.10.** *Si $\sigma$ et $\tau$ sont deux subdivisions alors il existe une subdivision $\theta$ (plus fine) telle que*

$$I^-(f,\sigma) \leqslant I^-(f,\theta) \leqslant I^+(f,\theta) \leqslant I^+(f,\tau).$$

*Démonstration.* Soit $\sigma = (x_1, ..., x_n)$ et $\tau = (y_1, ..., y_m)$. On note $H = \{x_1, ..., x_n\} \cup \{y_1, ..., y_n\}$. $H$ est fini et on note $\theta = (z_1, ...z_l)$ la subdivision associée à $H$.
Par construction, il existe $(t_i)_{i=0,\ldots,n} \in \{1, ..., l\}$ croissante telle que $x_i = z_{t_i}$. On a ainsi pour tout $i \in \{1, ..., l\}$ et pour tout $t \in (t_i, ...t_{i+1} - 1)$,

$$\inf_{x \in ]z_t, z_{t+1}[} f(x) \geqslant \inf_{x \in ]z_{t_i}, z_{t_{i+1}}[} f(x).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
I^-(f,\theta) &= \sum_{j=0}^{l-1} \inf_{x \in ]z_j, z_{j+1}[} f(x) \left(z_{j+1} - z_j\right), \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} \inf_{x \in ]z_j, z_{j+1}[} f(x) \left(z_{j+1} - z_j\right), \\
&\geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} \inf_{x \in ]z_{t_i}, z_{t_{i+1}}[} f(x) \left(z_{j+1} - z_j\right), \\
&\geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in ]z_{t_i}, z_{t_{i+1}}[} f(x) \left(z_{t_{i+1}} - z_{t_i}\right), \\
&\geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in ]x_i, x_{i+1}[} f(x) \left(x_{i+1} - x_i\right),
\end{aligned}$$

On montre de manière similaire $I^+(f,\sigma) \leqslant I^+(f,\tau)$.

□

**Lemma 3.11.** *Soit $h$ et $g$ deux fonctions telles que pour tout $x \in X$ et pour tout $y \in Y$, $h(x) \leqslant g(y)$ alors*

$$\sup_{x \in X} h(x) \leqslant \inf_{y \in Y} g(y).$$

*Démonstration.* Fixons $y \in Y$ alors $g(y)$ est un majorant de $f$ sur $X$ donc

$$\sup_{x\in X} h(x) \leqslant g(y).$$

C'est vrai pour tout $y \in Y$, donc $\sup_{x\in X} h(x)$ est un minorant de $y$ sur $Y$ et donc

$$\sup_{x\in X} h(x) \leqslant \inf_{y\in Y} g(y).$$

□

On peut donc désormais prouver la proposition.

*Démonstration.* Fixons $f$. On pose pour toute subdivision $\sigma$,

$$h(\sigma) = I^-(f,\sigma) \text{ et } g(\sigma) = I^+(f,\sigma)$$

D'après le lemme 3.10, on sait que pour toute subdivision $\sigma$ et pour toute subdivision $\tau$, on a $h(\sigma) \leqslant g(\tau)$. D'après le lemme 3.11, on obtient immédiatement que $I^-(f) \leqslant I^+(f)$. □

### 3.1.3 Un critère d'intégrabilité

**Proposition 3.12.** *Une fonction $f \in \mathcal{F}_b([a,b])$ est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $\sigma$ de $[a,b]$ telle que*

$$I^+(f,\sigma) - I^-(f,\sigma) < \varepsilon.$$

*Démonstration.* On raisonne par double implications.
Supposons tout d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\sigma_\varepsilon$ telle que

$$I^+(f,\sigma_\varepsilon) < I^-(f,\sigma_\varepsilon) + \varepsilon,$$

alors

$$I^+(f) \leqslant I^+(f,\sigma_\varepsilon) < I^-(f,\sigma_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant I^-(f) + \varepsilon.$$

C'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ donc $I^+(f) \leqslant I^-(f)$. Comme l'inégalité inverse est toujours vrai, on a obtenu l'égalité.
Réciproquement par définition de $I^-(f)$, il existe une subdivision $\sigma$ telle que

$$I^-(f) - \varepsilon \leqslant I^-(f,\sigma), \tag{3.1}$$

et il existe une subdivision telle que

$$I^+(f,\tau) \leqslant I^+(f) + \varepsilon. \tag{3.2}$$

Or on sait qu'il existe alors une subdivision $\theta$ telle que

$$I^-(f,\sigma) \leqslant I^-(f,\theta) \leqslant I^+(f,\theta) \leqslant I^+(f,\tau). \tag{3.3}$$

Combinant les équations 3.1,3.2 et 3.3, on obtient que

$$\begin{aligned} I^+(f,\theta) - I^-(f,\theta) &\leqslant I^+(f,\tau) - I^-(f,\sigma), \\ &\leqslant (I^+(f)+\varepsilon) - (I^-(f) - \varepsilon), \\ &\leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

car $I^+(f) = I^-(f)$. □

**Corollaire 3.13.** *Soit $f$, une fonction bornée, alors $f$ est intégrable si et seulement si il existe une suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions telle que $I^+(f,\sigma_n) - I^-(f,\sigma_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et alors*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} I^+(f,\sigma_n).$$

## 3.2 Famille de fonctions intégrables

### 3.2.1 Fonctions en escalier

**Définition 3.14.** Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier si et seulement si il existe $\sigma$ une subdivision de $[a, b]$ tell que pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, $f$ est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$. On dit que $\sigma$ est adaptée à $f$.

**Exemple 3.15.** *Dessin*

**Proposition 3.16.** *Une fonction $f$ en escalier est intégrable et si $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ est adaptée à $f$ et $\lambda_i$ est la valeur de $f$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ alors*

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i).$$

*Démonstration.* On note que si $\sigma$ est adaptée alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) = I^-(f, \sigma) = I^+(f, \sigma).$$

Donc d'après la proposition 3.12, $f$ est intégrable. D'après le corollaire 3.13, on obtient la formule. □

### 3.2.2 Fonctions monotones

**Proposition 3.17.** *Une fonction monotone de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est Riemann intégrable.*

*Démonstration.* On suppose que $f \in \mathcal{F}_b([a, b])$ et $f$ est croissante. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{|f(b)-f(a)|}{n} \leqslant \varepsilon$. On considère la subdivision $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ tel que $x_i = a + hi$ où $h = \frac{1}{n}$ alors

$$\begin{aligned}
I^+(f, \sigma) - I^-(f, \sigma) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \left( \sup_{t \in ]x_i, x_{i+1}[} f(t) - \inf_{t \in ]x_i, x_{i+1}[} f(t) \right), \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} h(f(x_{i+1}) - f(x_i)), \\
&\leqslant h(f(x_n) - f(x_0)), \\
&\leqslant \frac{|f(b) - f(a)|}{n}, \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 3.12, la fonction $f$ est intégrable. □

### 3.2.3 Fonctions continues

On va maintenant montrer qu'une fonction continue est Riemann-intégrable.

**Définition 3.18.** Une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

**Remarque 3.19.** *Une fonction $f$* uniformément continue *sur un intervalle $I$ est continue sur cet intervalle.*

**Proposition 3.20.** *(Cas particulier du théorème de Heine) Une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ est aussi uniformément continue.*

*Démonstration.* Par définition de l'uniforme continuité et de la continuité, si une fonction est uniformément continue sur $I$ alors elle est continue sur $I$.
On va démontrer par l'absurde l'implication inverse. Supposons que $f$ est continue mais pas uniformément continue. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in [a, b]$,

$$|x - y| \leqslant \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

En appliquant le raisonnement précédent pour $\delta = \frac{1}{n}$, on obtient deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon. \tag{3.4}$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle admet donc au moins une valeur d'adhérence réelle $x$. De même, notons $y$ une valeur d'adhérence réelle de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En passant à la limite dans l'équation 3.4, on obtient que $x = y$ et $0 \geqslant \varepsilon$. Absurde. □

**Example 3.21.** La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue. Il suffit de considérer les suites $x_n = n + 1/n$ et $y_n = n$ qui constituent un contre exemple. En effet, on a

$$\begin{cases} |x_n - y_n| \to 0 & \text{quand } n \to +\infty \\ |f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0 & \text{quand } n \to +\infty \end{cases}$$

**Proposition 3.22.** *Une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.*

*Démonstration.* Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 3.20, la fonction $f$ est uniformément continue et il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b],\ |x - y| \leqslant \delta \to |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $h = \frac{|b-a|}{n} \leqslant \delta$, on définit la subdivision de $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ tell que $x_i = a + hi$ pour $i \in \{0, ..., n\}$. Montrons que $I^+(f, \sigma) - I^-(f, \sigma) \leqslant \varepsilon$.
Commencons par considerer un intervalle $X_i = ]x_i, x_{i+1}[$, pour tout $x, y \in X_i$, on sait que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

d'où $f(x) \leqslant f(y) + \frac{\varepsilon}{b-a}$. Ainsi on obtient $\sup_{x\in X_i} f(x) \leqslant f(y) + \varepsilon/2$ et donc

$$\sup_{x\in X_i} f(x) \leqslant \inf_{y\in X_i} f(y) + \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

En sommant sur tous les intervalles, on obtient donc

$$\begin{aligned} I^+(f, \sigma) - I^-(f, \sigma) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(\sup_{t\in X_i} f(t) - \inf_{t\in X_i} f(t)), \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{b - a} \left( \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} - x_i \right), \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

□

### 3.2.4 Fonction qui n'est pas intégrable

**Exemple 3.23.** *On considère la fonction suivante définie sur* $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, pour tout $\sigma$ permutation, on a $I^+(f, \sigma) = 1$ tandis que $I^-(f, \sigma) = 0$.

## 3.3 Propriétés de l'intégrale

### 3.3.1 Propriétés élémentaires

**Théorème 3.24.** *Soit $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda f)$, $(f+g)$, $(\lambda f + \mu g)$ sont intégrables et*

1. $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$,
2. $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$,
3. $\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.

*Démonstration.* (Admise) Afin de prouver $a$) et $b$) , il faut manipuler des sup et des inf. On déduit facilement le $c$) de $a$) et $b$). □

**Théorème 3.25.** *Soit $a \leqslant c \leqslant b$ alors $f \in \mathcal{R}([a,b])$ si et seulement si $f \in \mathcal{R}([a,c])$ et $f \in \mathcal{R}([c,b])$. Lorsque c'est le cas, on a*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

*Démonstration.* (Admise) Intuition : on peut passer d'une subdivision de $[a,b]$ à deux subdivisions (une pour $[a,c]$ et une pour $[c,b]$). Réciproquement on peut concatener deux subdivisions afin d'en obtenir une sur $[a,b]$. □

**Théorème 3.26.** *Si $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ et $a \leqslant b$ tel que pour tout $x \in [a,b]$*

$$f(x) \leqslant g(x),$$

*alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

*Démonstration.* Soit $\sigma = (x_0, .., x_n)$ alors pour tout $i \in I$, on a

$$\inf_{t \in ]x_i, x_{i+1}[} f(t) \leqslant \inf_{t \in ]x_i, x_{i+1}[} g(t).$$

d'où en sommant $I^-(f,\sigma) \leqslant I^-(f,g)$ et donc $I(f) \leqslant I(g)$. □

**Proposition 3.27.** *Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$, positive sur $[a,b]$ et strictement positive en un point, alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.*

*Démonstration.* Par hypothèse, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Par continuité de la fonction, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x) \geqslant f(x_0)/2.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \int_a^{x_0-\delta} f(t)dt + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)dt + \int_{x_0+\delta}^b f(t)dt \\ &\geqslant 0 + 2\delta f(x_0)/2 + 0, \\ &> 0.\end{aligned}$$

□

En prenant la contraposée, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 3.28.** *Soit $f$ continue et positive sur $[a,b]$. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $f$ est identiquement nulle.*

### 3.3.2 Inégalités

**Théorème 3.29.** *Soit $f \in \mathcal{R}([a,b])$, et $a \leqslant b$ alors*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|.$$

*Démonstration.* Il suffit de noter que pour tout $t \in [a,b]$,

$$-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)[.$$

□

**Définition 3.30.** Si $f$ est intégrable sur $[a,b]$, on appelle valeur moyenne de $f$,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

**Proposition 3.31.** *Soient $a < b$. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors*

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leqslant M$$

*Démonstration.* On a

$$\int_a^b mdt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b Mdt.$$

Ainsi

$$(b-a)m \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant (b-a)M.$$

En divisant par $b-a$, on obtient le résultat. □

**Théorème 3.32.** *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $f$ et $g$ intégrables sur $[a,b]$ et $a \leqslant b$ alors*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

*Si $f$ et $g$ sont continues alors l'équation précédente est une égalité si $(f,g)$ forme une famille liée (i.e. il existe $(p,q) \neq (0,0)$ tel que $pf + qg = 0$)*

*Démonstration.* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\theta_\lambda = (f + \lambda g)^2$. On sait que d'une part

— la fonction $\theta_\lambda$ est positive donc $\int_a^b \theta_\lambda \geqslant 0$.

— D'autre part par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_a^b \theta_\lambda &= \int_a^b (f^2 + 2\lambda fg + \lambda^2 g^2),\\ &= \int_a^b f^2 + 2\lambda\left(\int_a^b fg\right) + \lambda^2\left(\int_a^b g^2 dt\right),\\ &= \mathcal{P}(\lambda).\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}(\lambda)$ est un polynôme en $\lambda$ de degré au plus 2.

Nous devons distinguer plusieurs cas possibles.

— $\mathcal{P}(\lambda)$ est de degré 0 alors les deux membres de l'inégalité de (CS) sont nuls et elle est donc bien vérifiée.

— $\mathcal{P}(\lambda)$ est de degré 1 et positif pour tout $\lambda$, ce n'est pas possible.
— Il est de degré 2 et est toujours positif ainsi son discriminant est négatif ou nul :

$$\Delta = 4\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 - 4\left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2 dt\right) \leqslant 0.$$

Considérons maintenant le cas d'égalité
— Si $g = 0$ alors le couple $(p, q) = (0, 1)$ est une solution différente de $(0, 0)$ de l'équation

$$pf + qg = 0.$$

Ainsi $f$ et $g$ sont liés.
— Si $g \neq 0$ alors la fonction $g^2$ est continue, positive et strictement positive en un point donc on sait d'après un résultat précédent que $\int_a^b g^2$ est strictement positif. $\mathcal{P}(\lambda)$ est un polynôme du second degré et il y a égalité si et seulement si le polynôme admet une racine double :

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \int_a^b (f + \lambda_0 g)^2 = 0$$

Par le corrolaire précédent, on a alors $(f + \lambda_0 g)^2 = 0$ et donc $f + \lambda_0 g = 0$, la famille $(f, g)$ est liée.

□

## 3.4 Primitive et intégrale

**Théorème 3.33.** *Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$ alors la fonction*

$$F : \begin{cases} [a, b] & \to \mathbb{R} \\ x & \to \int_c^x f(t)dt. \end{cases}$$

*est bien définie. De plus $F$ est continue sur $[a, b]$ et si $f$ est continue en $x_0 \in ]a, b[$ alors $F$ est dérivable en $x_0$ et sa dérivée en $x_0$ est $f(x_0)$.*

*Démonstration.* D'après la relation de Chasles, on sait que la fonction est intégrable sur n'importe quel sous-intervalle de $[a, b]$ donc $F$ est bien définie.
Montrons que $F$ est continue. On montre que $F$ est Lipschitzienne (il existe $M > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y) \leqslant M|x - y|)$. $f$ est intégrable donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}$. Soit $x \leqslant y \in [a, b]$ alors

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left|\int_c^y f(t)dt - \int_c^x f(t)dt\right|, \\ &= \left|\int_y^x f(t)dt\right|, \\ &\leqslant \int_x^y |f(t)|dt, \\ &\leqslant M|y - x|. \end{aligned}$$

On montre le même résultat si $y \leqslant x$. Ainsi $F$ est Lipschitzienne et donc continue.
Montrons maintenant que si $f$ est continue en $x_0 \in ]a, b[$ alors $F$ est dérivable en $x_0$. On sait que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Comme $f$ est continue, $\min_{[x_0,x]} f$ et $\min_{[x,x_0]} f$ sont atteint et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c_x \in [x_0, x]$ tel que

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(c_x).$$

En considérant $x$ qui converge vers $x_0$ alors $c_x$ converge aussi vers $x_0$ et on obtient par continuité de $f$ :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

□

**Définition 3.34.** Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. On dit que $g$ est une primitive de $f$ sur $I$ si $g$ est dérivable et $g' = f$.

**Proposition 3.35.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction continue bornée et $x_0 \in I$ alors l'ensemble des primitives de $f$ est*

$$\left\{ g_\lambda : I \to \mathbb{R}, \text{ tel que } g(x) = \lambda + \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

*Démonstration.* Le théorème précédent assure que $x \to \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est une primitive. D'autre part si $g$ et $h$ sont deux primitives de $f$ alors

$$(h - g)' = h' - g' = 0.$$

Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h - g = \lambda$. □

**Théorème 3.36.** *(Théorème fondamental de l'analyse) Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction continue bornée et $F$ une primitive de $f$. Pour tout $a, b \in I$,*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

*Démonstration.* D'après la proposition, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \lambda + \int_a^x f(t)dt$ d'où

$$F(b) - F(a) = \left( \int_a^b f(t)dt + \lambda \right) - \left( \int_a^b f(t)dt + \lambda \right) = \int_a^b f(t)dt.$$

□

## 3.5 Techniques de calcul

### 3.5.1 Changement de variable

Étant donné deux intervalles $I$ et $J$, on note $\mathcal{C}^1(J, I)$ l'ensemble des fonctions de $J$ dans $I$ dérivable et dont la dérivée est continue.

**Théorème 3.37.** *Soient $I$ et $J$ deux intervalles, $f$ une fonction sur $I$ continue et $g$ dans $\mathcal{C}^1(J, I)$. Soient $\alpha, \beta \in J$ et $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

*Démonstration.* La fonction $f$ est continue sur $I$, elle admet donc une primitive $F$ sur $I$. alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)).$$

Or la fonction $F \circ g$ est une primitive de la fonction $t \to f(g(t))g'(t)$ d'où

$$F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

□

Il existe dans la littérature des versions plus générales de cet énoncé, on peut affaiblir l'hypothèse de continuité. Il existe un cas simple où on peut prendre $f$ intégrable.

**Remarque 3.38.** *Soient $I = [a, b]$ un segment, $f$ une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors pour tout $c$ de $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t + c)$ est une fonction intégrable sur $[a - c, b - c]$ et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(t + c)dt.$$

### 3.5.2 Intégration par partie

**Théorème 3.39.** *Soient $I$ un intervalle, $a, b \in I$ et deux fonctions $u$ et $v$ dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ alors*

$$\int_a^b u'(t)v(t) = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

*Démonstration.* On sait que

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

En intégrant à gauche et à droite, on obtient le résultat souhaité. □

## 3.6 Stabilité par produits mais pas par composition

On admettra sans démonstration que le produit de deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$. L'ensemble $R([0, 1])$ est stable par multiplication.

Mais ATTENTION, il existe des fonctions $f$ et $g$ qui sont intégrables sur $[0, 1]$ mais telles que $f \circ g$ ne soit pas intégrable sur $[0, 1]$. L'ensemble $R([0, 1])$ n'est pas stable par composition.

Chapitre

# 4 Intégrale généralisée

Dans le chapitre précédent, on a donné un sens à

$$\int_a^b f(t)dt$$

lorsque

1. $f$ pas trop bizarre (en particulier continue),
2. $a, b \in \mathbb{R}$ ($[0,1]$,$[2,3]$),
3. $f$ bornée.

On veut donner un sens lorsque $f$ non bornée ou $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ afin de pouvoir donner un sens à des intégrales indispensables en probabilité comme par exemple, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$. On peut également donner du sens à $\int_0^1 \ln t\, dt$.

## 4.1 Intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

### 4.1.1 Définitions

On suppose dans cette partie que $b = +\infty$ et $a \in \mathbb{R}$.

**Définition 4.1.** On dit que $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ est localement Riemann-intégrable sur $[a, +\infty[$ si pour tout $x \geqslant a$, $f$ est Riemann-intégrable sur $[a, x]$. On note $R_{loc}([a, +\infty[$ l'ensemble des fonctions localement intégrable sur $[a, +\infty[$.

**Définition 4.2.** Si $f \in R_{loc}([a, +\infty[)$ alors la fonction

$$x \to \int_a^x f(t)\, dt$$

est bien définie sur $[a, +\infty[$. Si $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge. Sinon on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

**Exemple 4.3.** *1. $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ alors $f \in R_{loc}([0, +\infty[)$. Soit $x \geqslant 0$, on a*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} = [\arctan(x)]_0^x = \arctan(x).$$

*Comme* $\arctan(x)$ *converge vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, l'intégrale généralisée converge. La fonction* arctan *est la fonction réciproque de la fonction tangente)*

*2. $g(t) = \frac{1}{1+t}$ alors $g \in R_{loc}([0, +\infty[)$. Soit $x \geqslant 0$, on a*

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) \to +\infty.$$

*Donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt$ diverge.*

*3.* $h(t) = \cos(t)$ *alors* $h \in R_{loc}([0, +\infty[)$ *et*

$$\int_0^x \cos(t) = \sin(x).$$

*Or* $\sin(x)$ *ne converge pas lorsque* $x$ *tend vers* $+\infty$ *donc l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ *diverge.*

**Exemple 4.4.** *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$*, si et seulement si ,* $\alpha > 1$*.*

*En effet soit* $\alpha \neq 1$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *alors*

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

*Cette dernière expression a une limite finie ssi* $\alpha > 1$ *et alors* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{[} t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha - 1}$*.*
*Il reste à étudier le cas de* $\alpha = 1$

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x) \to_{x \to +\infty} +\infty,$$

*donc l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}$ *diverge.*

### 4.1.2 Propriétés

**Remarque 4.5.** *Attention, on ne peut pas complètement calquer la démarche de la convergences des séries positives sur celle de la convergence des intégrales de fonctions positives localement intégrables sur* $\mathbb{R}^+$*. Il existe des fonctions continues sur* $\mathbb{R}_+$*, telles que*

- $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *converge ;*
- $f(t) \not\to 0$ *quand* $t \to +\infty$*.*

*Par contre, s'il existe* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *tel que* $f(t) \to a$ *quand* $t \to +\infty$ *et si l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente alors* $a = 0$*. Ce qui peut fournir un critère de divergence grossière.*

Comme pour les séries, la nature de l'intégrale ne dépend que du comportement en l'infini.

**Proposition 4.6.** *Soit* $f \in R_{loc}([a, +\infty[)$ *et* $b \geqslant a$ *alors* $f \in R_{loc}([b, +\infty[)$*. L'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge si et seulement si* $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ *converge. Lorsque c'est le cas*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^{+\infty} f(t)dt.$$

*Démonstration.* Soit $x \geqslant b \geqslant a$ alors d'après la relation de Chasles,

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^{+\infty} f(t)dt.$$

Comme $\int_a^b f(t)dt$ est une constante réelle, les expressions $\int_a^x f(t)dt$ et $\int_b^x f(t)dt$ ont le même comportement.

Lorsque la limite existe, on passe à la limite pour obtenir l'égalité de la proposition. □

**Définition 4.7.** On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.

**Proposition 4.8.** *Soit* $f \in R_{loc}([a, +\infty[)$*, si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est absolument convergente alors elle est converge.*

**Lemma 4.9.** *$lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour toute suite $x_n \to +\infty$, la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n = \int_a^{x_n} f(t)dt$$

*Démonstration.* On utilise le lemme précédent. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. On pose

$$u_n = \int_a^{x_n} f(t)dt.$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. L'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge donc la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \int_0^{x_n} |f(t)|dt)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Elle est donc de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n^* \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n^*$ et pour tout $p \geqslant 0$,

$$|z_{n+p} - z_n| \geqslant \varepsilon$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant n_*$ et $p \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| &= \left| \int_a^{x_{n+p}} f(t)dt - \int_a^{x_n} f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt \right| \\ &= \leqslant \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|dt \\ &= |z_{n+p} - z_n| \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

□

### 4.1.3 Cas des fonctions positives

Comme pour les séries, il s'avère donc intéressant d'étudier les fonctions positives. Si $f$ est une fonction positive alors

$$x \to F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

est une fonction croissante sur $[a, +\infty[$. Il y a donc deux possibilités

1. $F$ est majorée et donc convergente lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
2. $F$ n'est pas majorée et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge. On peut toutefois alors donner un sens à cette intégrale en écrivant que $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.

Maintenant, on va décrire deux critères de convergence.

**Proposition 4.10.** *(Critère de comparaison) Soient $f$ et $g$ dans $R_{loc}([a, +\infty[)$, positives sur $[a, +\infty[$. On suppose qu'il existe $b \geqslant a$ tel que*

$$\forall x \geqslant b,\ f(x) \leqslant g(x)$$

*Alors*

1. *si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.*
2. *si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.*

**Proposition 4.11.** *(Critère d'équivalence) Soient $f$ et $g$ dans $R_{loc}([a,+\infty[)$, positives sur $[a,+\infty[$. On suppose que $f \sim_{+\infty} g$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$.*

On rapelle que $f \sim_{+\infty} g$ si et seulement si

1. soit il existe $b \geqslant a$ tel que pour tout $x \geqslant b$, $g(x) > 0$ et $\frac{f(x)}{g(x)}$ converge vers 1 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
2. soit il existe $b \geqslant a$ tel que pour tout $x \geqslant b$, $f(x) > 0$ et $\frac{g(x)}{f(x)}$ converge vers 1 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Proposition 4.12.** *(Critère en $x^\alpha$) Soit $f \in R_{loc}([a,+\infty[)$,*

1. *s'il existe $1 < \alpha < +\infty$, tel que $t^\alpha f(t)$ possède une limite réelle finie en $+\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.*
2. *s'il existe $\alpha \leqslant 1$, tel que $t^\alpha f(t)$ tende vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.*

*Démonstration.* Admises □

**Exemple 4.13.**

1. *Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ alors $f \in R_{loc}([1,+\infty[)$ et*
$$\frac{\ln(x)}{x^2}x^{3/2} = \ln(x)x^{1/2} \to 0.$$
*Donc l'intégrale généralisée converge.*
2. *Soit $g(x) = \frac{1}{\ln(x)\sqrt{x}}$ alors $g \in R_{loc}([2,+\infty[)$,*
$$\frac{1}{\ln(x)\sqrt{x}}x^{3/4} = \frac{x^{1/4}}{\ln(x)} \to +\infty.$$
*Ainsi l'intégrale généralisée diverge.*

## 4.2 Intégrale généralisée sur un intervalle borné

On s'intéresse maintenant à l'intégrale de la forme $\int_a^b f(x)dx$ ou $f$ n'est pas Riemann intégrable sur $[a,b]$ mais l'est pour tout $x > a$. Cette partie est une simple transposition de la démarche du cas d'un intervalle non borné.

### 4.2.1 Définitions

**Définition 4.14.** On dit que $f : ]a,b] \to \mathbb{R}$ est localement Riemann-intégrable sur $[x,b]$ si pour tout $x > a$, $f$ est Riemann-intégrable sur $[x,b]$. On note $R_{loc}(]a,b]$ l'ensemble des fonctions localement intégrable sur $]a,b[$.

**Définition 4.15.** Si $f \in R_{loc}(]a,b])$ alors on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge si la limite lorsque $x$ tend vers $a^+$ de $\int_x^b f(t)dt$ existe. Sinon on dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

**Exemple 4.16.** *On considère la fonction $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ qui est localement Riemann-intégrable sur $]0,1]$. Informellement la question est : "Est ce que l'aire entre l'axe 0 et $\frac{1}{x^\alpha}$ est finie ?" Supposons d'abord que $\alpha \neq 1$,*

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \int_x^a t^{-\alpha}dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right]_x^1$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}(1 - x^{1-\alpha}).$$

*Lorsque $x$ tend vers 0 alors $x^{1-\alpha}$ tend vers 0 si $\alpha < 1$ et vers $+\infty$ si $\alpha > 1$.*

*Si $\alpha = 1$ alors*

$$\int_x^1 \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_x^1 = -\ln(x) \to +\infty.$$

*Ainsi l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

### 4.2.2 Propriétés

**Remarque 4.17.** *Attention la condition est DIFFÉRENTE de celle de la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}$.*

De la même manière que pour $[a, +\infty[$, le comportement de l'intégrale ne dépend que du voisinage du point problématique, ici $a$. Si $c \in ]a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^c f(t)dt$ converge.

**Définition 4.18.** On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

**Proposition 4.19.** *Soit $f \in R_{loc}(]a, b])$, si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente.*

### 4.2.3 Cas des fonctions positives

Maintenant, on va donner des critères de convergence pour les fonctions positives

**Proposition 4.20.** *(Critère de comparaison) Soient $f$ et $g$ dans $R_{loc}(]a, b])$, positives sur $]a, b]$. On suppose qu'il existe $c \in ]a, b]$ tel que*

$$\forall x \leqslant c, \; f(x) \leqslant g(x)$$

*Alors*

1. *si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.*
2. *si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.*

**Proposition 4.21.** *(Critère d'équivalence) Soient $f$ et $g$ dans $R_{loc}(]a, b])$, positives sur $]a, b]$. On suppose que $f \sim_a g$ alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)dt$.*

**Proposition 4.22.** *(Critère en $x^\alpha$) Soit $f \in R_{loc}(]a, b])$,*

1. *s'il existe $\alpha < 1$, tel que $(t-a)^\alpha f(t)$ possède une limite réelle finie en $a^+$ alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.*
2. *s'il existe $\alpha \geqslant 1$, tel que $(t-a)^\alpha f(t)$ tende vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $a^+$ alors $\int_a^b f(t)dt$ diverge.*

*Démonstration.* Admises □

**Exemple 4.23.**

1. *Soit $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{\sqrt{x-2}}$ alors $f \in R_{loc}(]2, 3])$ et*

$$\frac{\ln(x-2)}{\sqrt{x-2}} * (x-2)^{3/4} = \ln(x-2)(x-2)^{1/4} \to_{x\to 2} 0.$$

*Donc l'intégrale généralisée converge.*

*2. Soit $g(x) = \frac{\ln(x-4]^2}{(x-4)^2}$ alors $g \in R_{Loc}(]4,6])$,*

$$\frac{\ln(x-4]^2}{(x-4)^2}(x-4) = \frac{\ln(x-4]^2}{(x-4)} \to_{x \to 4^+} +\infty.$$

*Ainsi l'intégrale généralisée diverge. (chercher une autre preuve).*

**Proposition 4.24.** *(Principe de translation) Soit $f \in R_{loc}(]a,b])$, on considère $g$ la fonction dont le domaine de définition est obtenu par translation : $g\ ]0, b-a] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(t+a)$ alors $g \in R_{loc}(]0, b-a])$ et on a l'équivalence entre*

1. *L'integrale $\int_a^b f(t)dt$ converge.*
2. *L'integrale $\int_0^{b-a} g(u)\,du$ converge.*

## 4.3 Généralisation à d'autres cas

### 4.3.1 Le cas de $]-\infty, b]$ ou de $[a, b[$

**Définition 4.25.** On dit que $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ est localement Riemann-intégrable sur $]-\infty, b]$ si pour tout $x \leqslant b$, $f$ est Riemann-intégrable sur $[x, b]$. On note $R_{loc}(]-\infty, b]$ l'ensemble des fonctions localement intégrable sur $]-\infty, b]$.

Il suffit d'utiliser le principe de symétrie suivant

**Proposition 4.26.** *(Principe de symétrie) Soit $f \in R_{loc}(]$, on considère $g$ la fonction dont le domaine de définition est obtenu par symétrie : $g\ [-b, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(-t)$ alors $g \in R_{loc}([-b, +\infty[)$ et on a l'équivalence entre*

1. *L'integrale $\int_{-\infty}^b f(t)\,dt$ converge.*
2. *L'integrale $\int_{-b}^{+\infty} g(u)\,du$ converge.*

On peut ainsi en déduire les propriétés analogues. On adapte également au cas des fonctions localement intégrables sur $[a, b[$ en se ramenant à la situation sur $]-b, -a]$.

### 4.3.2 Autres cas

On se contente d'évoquer le cas des fonctions pour lesquels le nombre de points ne relevant pas du chapitre précédent est fini. On découpe l'intervalles en petits bouts tel que chaque bout est d'une forme déjà traitée afin de pouvoir énoncer la relation de Chasles. Par exemple, dans le cas de $\mathbb{R}$

**Définition 4.27.** On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est localement Riemann-intégrable sur $]-\infty, +\infty]$ si pour tout segment $[a, b]$, $f$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. On note $R_{loc}(]-\infty, +\infty[)$. l'ensemble des fonctions localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. $[a, +\infty[$, fait
2. $]-\infty, b]$, similaire au cas précédent.
3. $]a, b]$, fait
4. $[a, b[$ similaire au cas précédent.

**Définition 4.28.** Soit $f \in R_{Loc}(\mathbb{R})$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty}$ converge si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{\infty}^c f(t)dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ convergent. S'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que l'une des deux intégrales diverge alors on dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

**Exemple 4.29.** *1. Si on étudie la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ alors puisque $]0, +\infty[=]0, 1] \cup [1, +\infty[$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^2}$ diverge donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ diverge.*

*2. Si on étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$, alors on peut remarquer que puisque $\int_0^{+\infty} tdt$ diverge, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ diverge.*

## 4.4 Applications

Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente alors on a par exemple,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-2x}^{5x^2} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

En effet, si l'on considère l'application continue $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, on sait que l'application $F$ est continue sur $\mathbb{R}$ (Attention, ce n'est une primitive de $f$ que si $f$ est continue) et qu'elle possède des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$. Puisque

$$\int_{-2x}^{3x^2} f(t)dt = \int_0^{5x^2} f(t)dt - \int_0^{-2x} f(t)dt = F(5x^2) - F(-2x)$$

On a donc

$$\lim_{x\to+\infty}(F(5x^2)-F(-2x)) = \lim_{u\to+\infty} F(u) - \lim_{v\to-\infty} F(v) = \int_0^{+\infty} f(t)dt - \int_0^{-\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

Par contre si l'intégrale diverge, **on n'a pas le droit par exemple de dire**

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} tdt = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} tdt = 0$$

En effet, on a pas le droit d'écrire l'intégrale de droite (qui n'a aucun sens même dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, pour toutes fonctions $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} w(x)$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-w(x)}^{u(x)} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)$$

tandis que, lorsque l'intégrale ne converge pas la limite du terme de gauche peut ne pas exister et même si elle existe, elle dépend des fonctions $u$ et $w$. Par exemple,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{2x} tdt = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \int_{-x^3}^{2x} tdt = -\infty$$

Chapitre

# 5 Suites de fonctions d'une variable réelle

## 5.1 Convergence simple et uniforme

### 5.1.1 Motivation

On a étudié la convergence d'une suite de nombre réels et on peut être tenté de définir une notion de convergence pour une suite de fonctions. Intuitivement, si on considère par exemple $f_n(x) = x/n$, on peut se dire[1] que $f_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

- si $f_n \to f$, que peut-on dire de la suite $\int_a^b f_n(t)\,dt$ ? En particulier, est-ce que cela converge vers $\int_a^b f(t)\,dt$ ?
- si $f_n \to f$ et si chaque $f_n$ est continue, alors est-ce que $f$ sera continue ?
- si $f_n \to f$ et si $x_n \to \overline{x}$, que peut-on dire de la suite $f_n(x_n)$ ? En particulier, est-ce que cela converge vers $f(\overline{x})$ ?
- ...

c'est ce type de questions que l'on peut se poser

### 5.1.2 Définition de la convergence simple et uniforme

Soit $X$ un ensemble non vide, on note $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $X$ dans $\mathbb{R}$. Cet ensemble $(\mathcal{F}(X,\mathbb{R}), =, +, .)$ possède une structure d'espace vectoriel. Si $f, g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on peut définir à la fois $(f+g)$ et $\lambda f$ sont aussi dans $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$. Formellement, tout $x \in X$

$$\begin{cases} (f+g)(x) &= f(x)+g(x); \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x). \end{cases}$$

En termes de vocabulaire, on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ pour dire que pour chaque indice $n$, $f_n \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$.

**Exemple 5.1.**

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n(x) = x^n$,*
2. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $x \in [1,+\infty[$ et tout $n \geqslant 1$ par $f_n(x) = \frac{1}{n}\frac{1}{x}$.*

#### Convergence simple (ou convergence ponctuelle)

La première notion de convergence est l'extension naturelle de la théorie des suites numériques : pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle dont on peut étudier la convergence.

**Définition 5.2.** On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ *converge simplement* vers $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ sur $X$ si pour tout $x \in X$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ :

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_{x,\varepsilon}\, \forall n \geqslant \eta_{x,\varepsilon}, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

1. Mais définir une notion de convergence ne saurait constituer un but en soi, Il faut ensuite réfléchir sur les conséquence d'une définition ; si on ne peut rien en déduire, il vaut mieux se dire que la définition n'est pas pertinente.

On le note $f_n \to^s_X f$.

**Remarque 5.3.** *On notera l'ordre des quantificateurs. En particulier $\eta_{x,\varepsilon}$ dépend du choix de $x$ et de $\varepsilon$.*

**Remarque 5.4.** *Il y a unicité de la de limite (lorsqu'elle existe) par unicité de la limite des suites réelles. Lorsque la limite simple existe, on écrira parfois : $\lim f_n = f$.*

**Exemple 5.5.**

1. *$X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$ alors $f_n$ converge simplement vers la fonction $f$ telle que pour tout $x \in X$, $f(x) = 0$.*
2. *$X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(nx)$ alors il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f$. En effet*
   - *(a) si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $f_n(x) \to 0$,*
   - *(b) si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ alors $f_n(x)$ diverge.*
3. *$X = [1, +\infty[$ et $g_n(x) = x^n$ alors il n'existe pas de fonction $g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ telle que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g$ car $g_n(2)$ diverge vers $+\infty$.*
4. *$X = ]-1, 1[$ et $g_n(x) = x^n$ alors pour tout $x \in X$, $f_n(x) \to 0$, donc $f_n$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle $0_X$.*
5. *$X = ]-1, 1]$ et $g_n(x) = x^n$ alors pour tout $x \in X$, $f_n(x) \to g(x)$, où $g(x)$ vaut toujours 0 sauf au point 1 où elle vaut 1.*

**Remarque 5.6.** *Comme le montre le dernier cas, la limite simple de fonctions continues n'est pas forcément continue.*

**Remarque 5.7.** *Si $X_1 \subset X$, plus précisément on suppose que $X = X_1 \cup X_2$. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ alors $f_n \to^s_X f$ entraine que $f_n \to^s_{X_1} f$. On a même*

$$f_n \to^s_X f \Leftrightarrow \begin{cases} f_n \to^s_{X_1} f \\ f_n \to^s_{X_2} f \end{cases}$$

**Convergence uniforme**

**Définition 5.8.** On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ *converge uniformément* vers $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ sur $X$ si

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to+\infty} 0.$$

On le note $f_n \to^u_X f$. La définition est équivalente à la suivante :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ \forall n \geqslant \eta_\varepsilon, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

**Remarque 5.9.** *Si $X = X_1 \cup X_2$. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ alors*

$$f_n \to^u_X f \Leftrightarrow \begin{cases} f_n \to^u_{X_1} f \\ f_n \to^u_{X_2} f \end{cases}$$

**interprétation graphique**

voir dessin fait pendant le cours

**Example 5.10.**

1. Soit $X = [0, M]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$, soit $f_n(x) = \frac{x}{n}$ et $f(x) = 0$ alors la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0, M]$.

$$\delta_n = \sum_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,M]} |\frac{x}{n}| = \frac{M}{n} \to_{n\to+\infty} 0.$$

2. Considérons les mêmes fonctions sur $X = \mathbb{R}$, alors

$$\delta_n = \sum_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

Comme la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $f$ sur $\mathbb{R}$. (Néanmoins elle converge simplement).

**Définition 5.11.** Si $X$ est un ensemble et $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, on appelle norme sup de $f$ l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ défini par $\sup_{x\in X} |f(x)|$. On le note généralement $\|f\|_\infty$.

Il s'agit d'une notation commode car synthétique, par exemple plutôt que d'écrire,

$$\sup_{x\in X} |(f+g)(x)| \leqslant \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)|$$

on peut résumer $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

**Remarque 5.12.** *Avec ces notations, on a $f_n \to_X^u f$ si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.*

**Proposition 5.13.** *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ alors elle converge aussi simplement vers $f$.*

**Remarque 5.14.** *L'implication inverse est fausse : pour $f_n(x) = x^n$ définie sur $[0,1]$, on sait qu'elle converge simplement vers une fonction $g$ mais ne converge pas uniformément car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - g\|_\infty = 1$.*

**Proposition 5.15.** *(Critère de Cauchy) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. Elle converge uniformément si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon,\ \forall p, q \geqslant \eta_\varepsilon,\ \|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon.$$

*Démonstration.* $\Rightarrow$ Si $f$ converge uniformément vers $f$ alors $\|f_n - f\|_\infty \to_{n\to+\infty} 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0$ tel que $\delta_n \leqslant \varepsilon$ au delà de $n_0$. Soit $p, q \geqslant n_0$, alors

$$\begin{aligned}
\|f_p - f_q\|_\infty &= \|(f_p - f) + (f - f_q)\|_\infty \\
&\leqslant \|f_p - f\|_\infty + \|f_q - f\|_\infty \\
&\leqslant \|f_p - f\|_\infty + \|f - f_q\|_\infty \\
&\leqslant 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Réciproquement, pour chaque $x \in X$ la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy donc convergente dans $\mathbb{R}$. On note $f(x)$ la limite et par définition $f_n \to_X^s f$. Montrons que la convergence est uniforme.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $q, p \geqslant n_0$, $\|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in X,\ |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Par conservation des inégalités larges par passage à la limite lorsque $q$ tend vers l'infini, on obtient

$$\forall p \geqslant n_0,\ \forall x \in X,\ |f_p(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $X$. $\square$

## 5.2 Propriétés de la convergence uniforme

### 5.2.1 Continuité

**Proposition 5.16.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f$, alors $f$ est continue.*

*Démonstration.* La continuité est une propriété locale. Il suffit de la vérifier pour tout $x_0 \in X$. Soit $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_{n_0} - f\| \leqslant \varepsilon/3,$$

et par continuité de $f_{n_0}$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leqslant \varepsilon/3.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

La fonction $f$ est donc continue. □

En contraposant, on obtient :

**Corollaire 5.17.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge vers $f$ sur un intervalle $I$. Si $f$ n'est pas continue alors la convergence n'est pas uniforme.*

### 5.2.2 Intégration

**Proposition 5.18.** *Soit une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ intégrables définies sur l'intervalle $(a,b)$ qui converge uniformément vers une fonction $f$. Alors $f$ est intégrable et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

*Démonstration.* La démonstration est significativement plus simple si les fonctions sont continues car le caractère intégrable de la limite est automatique puisqu'elle est continue. L'étape 2 devient inutile.

**Etape 1.** Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

ou de manière équivalente,

$$\forall x \in [a,b],\ f_n(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant f(x) \leqslant\ f_n(x) + \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{5.1}$$

**Etape 2.** Montrons le caractère intégrable. En utilisant les notations du chapitre 3, on en déduit des inégalités (5.1) que pour toute subdivision $\sigma$ de $[a,b]$,

$$I^-(f_n - \frac{\varepsilon}{b-a}, \sigma) \leqslant I^-(f,\sigma) \leqslant I^+(f,\sigma) \leqslant I^+(f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}, \sigma) \tag{5.2}$$

Mais $\begin{cases} I^+(f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}, \sigma) &= I^+(f_n,\sigma) + \varepsilon; \\ I^-(f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}, \sigma) &= I^-(f_n,\sigma) - \varepsilon. \end{cases}$

De plus par définition d'une fonction intégrable, pour chaque $n$, il existe une subdivision $\sigma_n$ telle que

$$\int_a^b f_n(x)\,dx - \varepsilon \leqslant I^-(f_n, \sigma_n) \leqslant I^+(f_n, \sigma_n) \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx + \varepsilon \tag{5.3}$$

En utilisant les inégalités (5.2) et (5.3), on a finalement

$$0 \leqslant I^+(f, \sigma) - I^+(f, \sigma) \leqslant 4\varepsilon \tag{5.4}$$

Ce qui montre le caractère intégrable de $f$.

**Etape 3.** On peut intégrer les inégalités (5.1) pour obtenir : pour tout $n \geqslant n_1$,

$$\int_a^b f_n(x) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x) \leqslant \int_a^b f_n(x) + \varepsilon.$$

La fonction $f$ est donc intégrable et l'intégrale de la limite est la limite des intégrales. □

Attention, le résultat précédent n'est valable QUE si la convergence est uniforme.

**Exemple 5.19** (hors programme)**.**

1. *Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction $f_n$ sur $[0,1]$ par $f_n = n\mathbb{1}_{]0,1/n]}$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ dont l'intégrale est nulle mais*

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1$$

2. *Ce n'est pas vrai non plus si la suite converge uniformément sur un intervalle non borné. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction $f_n$ par $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$. Alors $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$ bien que $f_n \to^u_{\mathbb{R}^+} 0$. En effet $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$.*

### 5.2.3 Dérivation

**Proposition 5.20.** *Soit une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ (dérivable et dont la dérivée est continue) tel que*

1. *il existe un point $a \in I$ tel que la suite réelle $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $b$.*
2. *la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $I$ vers une fonction $g$.*

*Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f$ définie par*

$$\forall x \in I,\ f(x) = b + \int_a^x g(t)dt$$

*Si de plus $I$ est un intervalle borné, alors la convergence est uniforme.*

*Démonstration.* Tout d'abord la fonction $g$ est continue sur $I$ comme limite uniforme de fonctions continues (conséquence du caractère $\mathcal{C}^1$).

Soit $x \in I$, alors on a

$$\begin{aligned}
\lim_n f_n(x) &= \lim_n \left( f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt, \right) \\
&= \lim_n f_n(a) + \lim_n \int_a^x f_n'(t)dt, \\
&= b + \int_a^x \lim_n f_n'(t)dt, \\
&= b + \int_a^x g(t)dt, \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

La troisième égalité vient de la proposition 5.18.

Montrons maintenant que si $I$ est un intervalle borné (contenu dans $[c, d]$) alors la convergence de $f_n$ vers $f$ est uniforme. On considère d'une part (hypothèse 1) un entier $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geqslant n_1,\ |f_n(a) - f(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

et d'autre part (hypothèse 2), un entier $n_2 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $x \in I$

$$\forall n \geqslant n_2,\ |f_n'(x) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Il s'ensuit que si $x \in I$, et si $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on a

$$f_n(x) - f(x) = \left( f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\, dt \right) - \left( f(a) + \int_a^x g(t)\, dt \right)$$

$$= (f_n(a) - f(a)) + \int_a^x f_n'(t) - g(t)\, dt$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|f_n'(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(a) - f(a)| + \left| \int_a^x f_n'(t) - g(t)\, dt \right| \\
&\leqslant \varepsilon + \left| \int_a^x f_n'(t) - g(t)\, dt \right| \\
&\leqslant \varepsilon + \left| \int_a^x |f_n'(t) - g(t)|\ dt \right| \\
&\leqslant \varepsilon + \left| \int_a^x \frac{\varepsilon}{d-c}\, dt \right| \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon}{d-c}|x-a| \\
&\leqslant 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure. $\square$

## 5.3 Interversion des limites

**Proposition 5.21.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues. On suppose que*

1. *la suite $f_n$ converge uniformément vers $f$ sur $X$,*
2. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$,*

*alors la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

**Exemple 5.22.** *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $f$ alors le résultat est faux comme le montre $f_n(x) = x^n$ définie sur $[0,1]$. La suite converge simplement vers la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1), \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

*Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. On a donc*

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \sim e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 1 = f(1).$$

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ \forall y \in I,\ |f_n(y) - f(y)| \leqslant \varepsilon/2.$$

De plus $f$ est continue comme limite uniforme de fonction continues donc $f(x_n) \to f(x)$. Ainsi, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_2,\ |f(x_n) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2)$,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. □

Le résultat précédent est un cas particulier d'un cadre un peu plus général,

**Proposition 5.23.** *(Interversion limites) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : [a,b[ \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On suppose que*

1. *la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur l'ensemble $[a,b]$,*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ converge vers $u_n$ lorsque $x$ converge vers $b$.*

*alors*

$$\begin{cases} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \text{ existe,} \\ \bullet \lim\limits_{x\to b} f(x) \text{ existe,} \\ \bullet \text{ on peut intervertir les deux limites :} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to b} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to b} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x) \end{cases}$$

**Remarque 5.24.** *Si les fonctions $f_n$ sont continues sur $[a,b]$, cette limite commune vaut $f(b)$, sinon on peut interpréter ce résultat à l'aide d'un prolongement par continuité.*

*Démonstration.* Commençons par démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse (cf proposition 5.15) il existe $n_0$ tel que pour tout $p \geqslant n_0$, et pour tout $q \geqslant n_0$ $\|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \varepsilon$ . Mais puisque pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, et pour tout $x$ de $[a,b[$

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \|f_p - f_q\|_\infty.$$

En considérant la limite lorsque $x$ tend vers $b$, on obtient pour tout $p \geqslant n_0$, et pour tout $q \geqslant n_0$

$$|u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à valeur réelles, donc elle converge. Soit $\ell$ cette limite. Montrons que $f(x)$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $b$.

$$|f(x)-\ell| \leqslant |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-u_n| + |u_n-\ell|$$

D'une part, $|f(x)-f_n(x)| \leqslant \varepsilon$, d'autre part, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $|u_{n_1}-\ell| \leqslant \varepsilon$. Finalement, par définition de $u_{n_1}$, il existe $\delta$ tel que $|x-b| \leqslant \delta$ implique que $|f_{n_1}(x)-u_{n_1}| \leqslant \varepsilon$.
Il s'ensuit que pour tout $x \in [a,b[$ tel que $|x-y| \leqslant \delta$, $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$. □

## 5.4 Applications aux séries entières

### 5.4.1 Régularité des séries entières

On rappelle la définition.

**Définition 5.25.** Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite donnée de nombres réels, On appelle série entière associée, la série numérique de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $x$ est un nombre réel. On la note parfois s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté $\sum a_n x^n$.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, alors on note $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions

$$\begin{cases} f_0(x) &= a_0 \\ f_1(x) &= a_0 + a_1 x \\ f_2(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ \ldots \end{cases}$$

Il importe de comprendre que quelque soit le domaine de définition (dit autrement quelque soit le rayon de convergence) de la série entière, les fonctions $f_n$ sont des polynômes définis sur tout $\mathbb{R}$.

**Proposition 5.26.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est $R_a$, alors pour tout $r$ positif et strictement inférieur à $R_a$, on a convergence uniforme sur $[-r,r]$ de la série de fonctions $(f_n)$ vers $f$. En particulier, d'après la proposition 5.16, $f$ est continue sur $[-r,r]$.*

Si on considère la "série entière dérivée", $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$, on démontre que la série entière dérivée possède même rayon de convergence que la série $\sum a_n z^n$. On peut donc appliquer la proposition 5.20 pour montrer que la fonction $f$ est dérivable sur tout segment contenu dans $]-R_a,R_a[$ et que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Application, on peut (fait en cours) en déduire complètement que pour tout $x$ réel,

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

En récurrant, on peut énoncer

**Proposition 5.27.** *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a$, alors $f$ est dérivable à tout ordre (fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-R_a,R_a[$.*

### 5.4.2 Exemples classiques

Les fonctions suivantes sont développables en série entière et la série entière associée n'est autre que la limite de la partie polynomiale des développements limités que l'on connaissait. Les développement en série entières de ces fonctions et leur rayons de convergence sont "à maitriser" (à retrouver sans faire appel à google).

- Pour la fonction $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$, le rayon de convergence vaut 1 et

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

- Pour la fonction $f_2(x) = \frac{1}{1+x}$, puisque $f_2(x) = f_1(-x)$, le rayon de convergence vaut aussi 1 et

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,$$

- Pour la fonction $f_3(x) = \ln(1-x)$, puisque $f_3'(x) = -f_1(x)$, en primitivant, le rayon de convergence vaut toujours 1, on peut aussi utiliser et

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \ldots = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n,$$

- Pour la fonction $f_4(x) = \ln(1+x)$, on peut primitiver $f_2$, on peut aussi utiliser $f_4(x) = f_3(-x)$, le rayon de convergence vaut 1 et

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

- Pour la fonction, $e^x$, on vient de voir que le rayon de convergence vaut $+\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

- Pour la fonction $\cos(x)$, qui est paire, le rayon de convergence vaut $+\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

- Pour la fonction $\sin(x)$, qui est impaire, le rayon de convergence vaut $+\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

- Pour la fonction $(1+x)^a$, le rayon de convergence vaut 1,

$$\forall x \in ]-1,1[,\ (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-1))}{n!}x^n + \ldots$$

  On remarque que pour $x = -1$, de toute façon la fonction n'est pas définie. Si $a$ est un entier, le développement est un polynôme et à partir d'un certain rang tous les coefficients sont nuls.

Chapitre

# 6 Applications aux séries entières

Les séries entières ont déjà présentées dans le cadre du second chapitre. Il importe de maitriser cette partie avant de se consacrer à ce nouveau chapitre. Ici, on ne va plus se contenter de regarder le comportement à $x$ fixé mais se focaliser sur le comportement en tant que fonction.

**motivation**
Pourquoi créer une théorie spécifique en plus de la théorie des séries numériques :

- permet de définir l'exponentielle
- lien avec les développement limités (DL).
- lien avec les fonctions génératrices.

## 6.1 Série entière

On insiste sur une remarque déjà fait au paragraphe 2.6

**Remarque 6.1.** *Attention, l'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ contient une d'ambiguïté au point $x = 0$. Il est INTERDIT d'écrire $0$ à la puissance $0$. En fait, il vaudrait mieux écrire $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Ce serait plus rigoureux mais très pénible, aussi on va conserver l'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en ayant en tête la convention que le premier terme de la série est la constante $a_0$ et non pas $a_0 x^0$.*

### 6.1.1 Lemme d'Abel

Le lemme d'Abel est vrai sur $\mathbb{C}$ mais nous l'utiliserons exclusivement sur $\mathbb{R}$.

**Lemma 6.2** (Lemme d'Abel)**.** *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. S'il existe un scalaire non nul $x_0$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée alors la série entière $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout nombre réel $x$ tel que $|x| < x_0$. De plus, si $|x| > x_0$ alors la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.*

**Corollaire 6.3** (HORS PROGRAMME[1])**.** *Si la série converge en un complexe $z_0$ alors elle converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $0 \leqslant |z| < |z_0|$.*

**Corollaire 6.4.** *Si la série converge en un réel $x$ tel que $r = |x|$, alors elle converge sur l'intervalle $]-r, r[$.*

**Définition 6.5.** On pose

$$\mathcal{G}_a = \{r \in \mathbb{R}^+ | (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}.$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est l'élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$ défini par $R_a = \sup \mathcal{G}_a$

**Remarque 6.6.** *On pose*

1. On n'a pas vu ce qu'était la notion de convergence pour les série dont le terme général est une suite de complexes.

- *l'ensemble $\mathcal{G}_a$ est symétrique par rapport à* $0$.
- *si* $0 \leqslant x \leqslant y$ *et si* $y \in \mathcal{G}_a$ *alors* $x \in \mathcal{G}_a$.
- *En conséquence $\mathcal{G}_a$ est un intervalle de la forme* $[-R_a, R_a]$ *ou bien* $]-R_a, R_a[$.
- *On a bien sur* $D_a \subset \mathcal{G}_a$. *(condition nécessaire de convergence)*
- *Si* $r \in \mathcal{G}_a \cap \mathbb{R}_+$, *et si* $|x| > r$, *alors* $x \notin D_a$

**Théorème 6.7.** *En utilisant les notations précédentes : soit* $z \in \mathbb{R}$
- *si* $|z| < R$ *alors la série entière* $\sum a_n z^n$ *est* **absolument** *convergente.*
- *si* $|z| > R$ *alors la série entière* $\sum a_n z^n$ *est divergente.*
- *si* $|z| = R$, *alors tout peut arriver.*

Le théorème suivant permet de distinguer trois sous-ensembles associés à des types de comportement. Pour des raisons liés à l'étude des séries sur $\mathbb{C}$, on utilise parfois le vocabulaire suivant
- à l'intérieur du disque de convergence,
- à l'extérieur du disque de convergence,
- sur le bord du disque de convergence.

pour désigner ces trois cas.

**Corollaire 6.8.** *Suivant la valeur du rayon de convergence, on a donc 3 cas :*
*Premier cas* $R = 0$ *alors* $D = \{0\}$,
*second cas cas* $R = +\infty$ *alors* $D = \mathbb{R}$.
— $R \in ]0, +\infty[$, *on a alors 4 sous-cas possibles*
  *a)* $D = ]-R, R[$ ;
  *b)* $D = ]-R, R]$ ;
  *c)* $D = [-R, R[$ ;
  *d)* $D = [-R, R]$ ;

**Exemple 6.9.** *On peut revisiter les exemples précédents.*
— *On peut calculer le rayon de convergence de* $\sum_{n \in \mathbb{N}} n! z^n$ *qui vaut* $R = 0$, *ce qui est cohérent avec* $D = \{0\}$.
— *On peut calculer le rayon de convergence de* $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ *qui vaut* $R = 1$, *ce qui est cohérent avec* $D = ]-1, 1[$.
— *On peut calculer le rayon de convergence de* $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n/(n!)$ *qui vaut* $R = +\infty$, *ce qui est cohérent avec* $D = \mathbb{R}$.

### 6.1.2 Méthode de calcul du rayon de convergence

En appliquant la règle de d'Alembert, on montre :

**Théorème 6.10.** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière. On suppose qu'il existe* $n_0$ *telle que pour tout* $n \geqslant n_0$, $a_n \neq 0$ *et*

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}}^+$$

*alors* "$R = \frac{1}{\ell}$".

*Remarque* 2. Dans la proposition précédente, on utilise la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

En appliquant la règle de Cauchy, on montre :

**Théorème 6.11.** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière. On suppose que*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}^+,$$

*alors le rayon de convergence est* $R = \frac{1}{\ell}$.

**Remarque 6.12.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $N_0$ un entier. On considère la suite $(b_n)_n = (|a_n|)_n$ et $(c_n)_n$ défini par $c_0 = 0 = \ldots = c_{N_0-1}$ puis par $c_n = a_n$ si $n \geqslant N_0$, alors les trois séries entières ont même rayon de convergence. Dit autrement, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n$ et $\sum_{n=N_0}^{+\infty} a_n z^n$ ont même rayon de convergence.*

**Corollaire 6.13.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$m \leqslant |a_n| \leqslant M,$$

*alors $R = 1$.*
*Dit autrement si $\liminf a_n > 0$ et $\limsup a_n < +\infty$ alors $R = 1$.*

## 6.2 Fonction développable en série entière

### 6.2.1 Définition

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de domaine de convergence $D$, on peut définir la fonction $f$ de $D$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Inversement, on s'intéresse aux fonctions qui peuvent s'écrire sous cette forme (sur un intervalle non trivial).

**Définition 6.14.** On dit que la fonction $f$ est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ et un réel $r \in ]0, +\infty[$ tel que

$$\forall x \in ]-r, r[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans ce cours, on ne rentrera pas dans les subtilités de regarder ce qui passe aux point $-r$ et $r$, on étudiera seulement sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$.

**Définition 6.15.** On dit que $f$ est de *classe* $\mathcal{C}^k$ si $f$ est dérivable $k$ fois et la $k$-ème dérivée notée $f^{(k)}$ est continue. On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si $f$ est infiniment dérivable.

**Proposition 6.16.** *Soit $f$ une fonction développable en série entière au voisinage de 0 alors $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et pour tout $x \in ]-r, r[$,*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots + (n+1)a_{n+1}x^n + (n+2)a_{n+2}x^{n+1} \ldots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3a_3x + 12a_4x^2 + \ldots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \ldots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

**Corollaire 6.17.** *Si $f$ est développable en série entière alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$; et*

$$\forall x \in ]-r, r[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{6.1}$$

*Ainsi le développement en série entière est unique.*

**Corollaire 6.18.** *Si $f$ est développable en série entière alors elle possède un développement limité à tout ordre en 0 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in ]-r, r[$,*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx_n + x^n\varepsilon(x)$$

*Ainsi le développement limité de $f$ en 0 n'est autre que la troncation de la série entière.*

**Remarque 6.19.** *Attention, si une fonction $f$ est de classe $C^\infty$, elle peut ne pas être développable en série entière au voisinage de 0. En posant $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, on a un unique candidat pour le développement.*

- *soit parce le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est nul*
- *soit parce que le rayon de convergence de la série est positif strictement, mais on peut avoir pour autant $f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

**Exemple 6.20.** *(complément) On peut montrer (c'est assez difficile pour vous) que la fonction imaginée par Cauchy*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ définie par } \begin{cases} \exp(-1/x^2) - 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

*est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais pas développable en série entière. En fait, on a $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, etc ... Si on étudie la série entière associée $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, tous les coefficients étant nuls, son rayon de convergence est $+\infty$. Mais*

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, \ f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

**Proposition 6.21.** *Soit $f$ une fonction développable en série entière au voisinage de 0 alors une primitive de $f$ est donnée par la fonction $F$ telle que pour tout $x \in ]-r, r[$,*

$$F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

Dit autrement et en résumé, pour une fonction développable en série entière, la dérivée de la somme est la somme des dérivées et une primitive de la somme est la somme des primitives.

**Proposition 6.22.** *La* fonction exponentielle *est développable en série entière :*

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

*Le rayon de convergence de cette série est $+\infty$ ainsi la fonction exponentielle est définie sur tout $\mathbb{R}$ et la fonction est donc égale à sa dérivée.*

### 6.2.2 Exemples classiques

Les fonctions suivantes sont développables en série entière et la série entière associée n'est autre que la limite de la partie polynomiale des développements limités que l'on connaissait. Les développement en série entières de ces fonctions et leur rayons de convergence sont "à maitriser" (à retrouver sans faire appel à Google [2]).

- Pour la fonction $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$, le rayon de convergence vaut 1 et

$$\forall x \in ]-1, 1[, \ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

- Pour la fonction $f_2(x) = \frac{1}{1+x}$, puisque $f_2(x) = f_1(-x)$, le rayon de convergence vaut aussi 1 et

$$\forall x \in ]-1, 1[, \ \frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,$$

2. La société Google© ne sponsorise pas ce cours.

- Pour la fonction $f_3(x) = \ln(1-x)$, puisque $f_3'(x) = -f_1(x)$, en primitivant, le rayon de convergence vaut toujours 1, on peut aussi utiliser et

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[,\ \ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \ldots = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n,$$

- Pour la fonction $f_4(x) = \ln(1+x)$, on peut primitiver $f_2$, on peut aussi utiliser $f_4(x) = f_3(-x)$, le rayon de convergence vaut 1 et

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[,\ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

- Pour la fonction, $e^x$, on vient de voir que le rayon de convergence vaut $+\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

- Pour la fonction $\cos(x)$, qui est paire, le rayon de convergence vaut $+\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

- Pour la fonction $\sin(x)$, qui est impaire, le rayon de convergence vaut $+\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

- Pour la fonction $(1+x)^a$, le rayon de convergence vaut 1,

$$\forall x \in ]-1, 1[,\ (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-1))}{n!}x^n + \ldots$$

  On remarque que pour $x = -1$, de toute façon la fonction n'est pas définie. Si $a$ est un entier, le développement est un polynôme et à partir d'un certain rang tous les coefficients sont nuls.

### 6.2.3 Opérations sur les fonctions développables en série entière

On a déjà remarqué le comportement des fonctions développables en série entière par rapport à la dérivation et à l'intégration. On va évoquer le comportement de ces fonctions par rapport à la somme et à l'addition

**Proposition 6.23.** *On considère $f$ (respectivement $g$) deux fonctions développables en série entières, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (respectivement $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$) de rayon de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$. Alors $f+g$ et $fg$ sont développables en série entières. De plus, si on désigne par $\widetilde{R} = \min(R_a, R_b)$, alors pour tout $x \in \left]-\widetilde{R}, \widetilde{R}\right[$, on a*

$$(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n \text{ et } (fg)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$$
\text{où} \begin{cases} c_0 & = & a_0 b_0, \\ c_1 & = & a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ \vdots & = & \ldots \\ c_n & = & a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \\ \vdots & = & \ldots \end{cases}
$$

L'intuition est très simple, il suffit d'imaginer que l'on fait la somme et le produit de deux polynômes infinis, en particulier,

$$
(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots) =
$$

$$
(a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)x^n + \ldots
$$

**Exemple 6.24.** *Attention lorsque le rayon des deux séries entières sont égaux, il est possible que le rayon de la somme soit strictement plus grand. Ainsi par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$ et $b_n = -1$ alors $R_a = R_b = 1$. Mais la série somme est la série de terme général*

$$
\forall n \in \mathbb{N}, d_n = a_n + b_n = 0.
$$

*Elle a donc un rayon de convergence infini : $R_{a+b} = +\infty$. Ainsi le rayon de la somme est strictement plus grand que le minimum des deux rayons.*

**Proposition 6.25.** *La série dérivée et la série primitive de la série entière $\sum a_n z^n$ ont un rayon de convergence égal à $R_a$.*

## 6.3 Fonctions génératrices

On verra en probabilité l'intérêt d'une telle fonction.

**Définition 6.26.** Etant donnée un proba $\mathbb{P}$ et $X$ une variable aléatoire à la valeur dans $\mathbb{N}$, la fonction génératrice de $X$ est la série entière

$$
G_X(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) x^n
$$

**Remarque 6.27.** *Si $R$ est le rayon de convergence de la série entière, alors on remarque que $R \geqslant 1$.*

**Proposition 6.28.**

| Loi | paramètres | $G_X$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| Loi de Bernoulli | $p$ | $1 + p(t-1)$ | $+\infty$ |
| Loi binomiale | $(n, p)$ | $(1 + p(t-1))^n$ | $+\infty$ |
| Loi de Poisson | $\lambda$ | $e^{\lambda}(t-1)$ | $+\infty$ |

*Démonstration.* Laissé en exercice. $\square$

Chapitre

# 7 Équations différentielles

## 7.1 Introduction

On s'interesse au problème suivant : soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ :

— soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (matrice de taille $n \times n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$),

— soit $b : I \to \mathbb{R}^n$

— Est ce que l'équation différentielle suivante a une solution ?

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t). \tag{7.1}$$

C'est à dire que l'on cherche des fonctions $x : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable vérifiant 7.1 sur l'intervalle $I$.

En écriture explicite, on a $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ et on cherche $x_1, ..., x_n$ $n$ fonctions dérivables telles que

$$x_1'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t)x_j(t) + b_1(t), \tag{7.2}$$

$$......., \tag{7.3}$$

$$x_n'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)x_j(t) + b_n(t). \tag{7.4}$$

**Example 7.1.**

Dans le cas où $n = 1$, alors le problème s'écrit comme la recherche d'une fontion $x : I \to \mathbb{R}$ tel que

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t).$$

**Définition 7.2.** On note $\mathcal{S}_b$ l'ensemble des solutions de 7.1 et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions associé à $b = 0$ (fonction identiquement nulle).

**Proposition 7.3.** — *$\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel.*

— *Si $x \in \mathcal{S}_b$ alors $\mathcal{S}_b = \{x + y, y \in \mathcal{S}_{\prime}\}$*

La seconde partie de la proposition montre qu'afin de connaitre l'ensemble de solution $\mathcal{S}_b$, il suffit de connaitre une solution particulière et l'ensemble de solution $\mathcal{S}_0$.

**Définition 7.4.** Soit $I$, $t_0 \in I$ and $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle *problème de Cauchy* relatif à l'équation 7.1 et à la condition initiale $x(t_0) = x_0$ la recherche de soutions de (1) telle que $x(t_0 = x_0$.

ON admet qu'on peut définir une intégrale sur $\mathbb{R}^n$ : si $f : I \to \mathbb{R}^n$ est suffisement régulière alors $\int_a^b f(t)dt \in \mathbb{R}^n$ peut être définie.

**Proposition 7.5.** *Il ya equivalenet entre les deux problèmes suivant : chercher une solution $x : I \to \mathbb{R}^n$*

— *de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant 7.1*
— *continue et tel que pour tout $t \in I$, $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s) + b(s)ds$*

**Exemple 7.6.** *Soit l'équation differentielle sur $\mathbb{R}$*

$$x'(t) = 2x(t) + 3,$$

*alors $\mathcal{S}_b = \left\{\lambda e^{-2t} - \frac{3}{2}\right\}$.*

## 7.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

**Théorème 7.7.** *Si $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b : I \to \mathbb{R}^n$ sont continues, si $t_0 \in I$ and $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alors il existe une et une seule application $x$ de $I$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

*Remarque* 3. Attention, il n'y a pas de coefficient devant $x'(t)$.

*Démonstration.* Admise □

Regardons deux applications de ce théorème.

### 7.2.1 Dimension 1

Soit $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ continues, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

a une unique solution.

### 7.2.2 Équation linaire d'ordre 2.

Soit $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$, $c : I \to \mathbb{R}$ continues, $t_0 \in I$,$x_0 \in \mathbb{R}$ et $x'_0 \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ x'(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t), \\ x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = x'_0. \end{cases} \tag{7.5}$$

a une unique solution.
Afin de démontrer ce résultat, on va transformer cette équation avec des dérivées secondes en dimension 1 en une équation différencielle d'ordre 1 mais de dimension 2. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x() \\ x'(t) \end{pmatrix}$ alors le problème 7.5 est équivalent au suivant

$$\begin{cases} X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t)a(t) & \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}, \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Or le théorème de Cuachy s'applique à ce dernier problème et donc on obtient l'existence et l'unicité d'une solution au problème 7.5.

*Remarque* 4. Attention que se passe-t-il pour le problème suivant

$$\begin{cases} I = \mathbb{R}, \\ tx'(t) + x(t) = e^t, \\ t_0 = 1, x_0 = 1. \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution à ce problème de Cauchy. En effet la seule solution $\mathcal{C}^1$ de l'équation différentielle est

$$x(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ si } t = 0, \end{cases}$$

et cette fonction prend la valeur $e - 1 \neq 1$ en 1. On peutappliquer le théoèrem sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ MAIS on doit les recoller pour faire une solution sur tout $\mathbb{R}$.

## 7.3 Résolutions explicites

On va s'interesser maintenant à la résolution explicite de certains cas particuliers. Afin de trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle, l'idée générale est de trouver l'ensemble $\mathcal{S}_0$ et UNE solution de $\mathcal{S}_b$.
Il ya deux types de compétences à avoir

— connaitre la méthode de résolution de certaines familles d'équation différentielle.
— savoir appliquer certaines méthodes génériques.

### 7.3.1 Équation linéaire d'ordre 1 à valeur dans $\mathbb{R}$

On commence par calculer les solutions de $x'(t) = a(t)x(t)$. Soit $A(t)$ une primitive de $a(t)$ alors

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \to \lambda e^{A(t)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

En effet, si $f(t) = \lambda e^{A(t)}$ alors $f'(t) = \lambda(a(t))e^{A(t)}$ par définition de la dérivée composée et est donc bien solution de l'équation homogène.
Afin de trouver une solution de l'équation avec un second membre, on va chercher une solution sous la forme (méthode de la variation de la contante)

$$x(t) = y(t)e^{A(t)}.$$

$x$ est solution du problème original si $y$ est solution de

$$\begin{aligned} e^{A(t)}y'(t) + a(t)e^{A(t)}y(t) &= a(t)e^{A(t)}y(t) + b(t) \\ \Leftrightarrow y'(t) &= b(t)e^{-A(t)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}ds$$

On a donc

$$\mathcal{S}_b = \left\{ \left( x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left( b(s)e^{-A(s)} \right) \right) e^{A(t)} \right\}$$

PROBLEME : choix de la primitive.

### 7.3.2 Équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

On s'intéresse aux équations de la forme $x'' = \alpha x' + \beta x + \gamma$, où $\alpha, \beta, \gamma$ sont des nombres réelles (pas des fonctions).
Il ya trois cas différents en fonction des racines de $X^2 - \alpha X - \beta$

— si $\Delta = \alpha^2 + 4\beta > 0$ alors on pose $x_1 = \frac{\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}$, $x_2 = \frac{\alpha-\sqrt{\Delta}}{2}$ et

$$\mathcal{S}_\gamma = \{\lambda e^{x_1 t} + \mu e^{x_2 t} - \frac{\gamma}{\beta}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

— si $\Delta = 0$ alors on pose $x_1 = \frac{\alpha}{2}$ et

$$\mathcal{S}_\gamma = \{\lambda t e^{x_1 t} + \mu e^{x_1 t} - \frac{\gamma}{\beta}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

— si $\Delta < 0$ alors on pose $x_1 = \frac{\alpha+i\sqrt{-\Delta}}{2}$, $x_2 = \frac{\alpha-i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et

$$\mathcal{S}_\gamma = \{\lambda e^{\alpha/2t} cos(\sqrt{-\Delta}) + \mu e^{\alpha/2t} sin(\sqrt{-\Delta}) - \frac{\gamma}{\beta}.\}$$

Si $\gamma$ n'est pas une constante, on tuilise la variation de la constante à partir des solutions de $x'' = \alpha x' + \beta x$.

### 7.3.3 Résolution d'équation différentielle plus général

Quelques méthodes :

— Si on connait l'espace de solution $\mathcal{S}_0$, transformer les constantes en fonctions afin d'obtenir une nouvelle équation différentielle (à priori plus simple).

— Si l'équation est de la forme

$$q(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t),$$

considdérer des intervalle où la fonction $a(t)$ ne s'annule pas (ainsi on peut diviser par $a(t)$). Chercher des solutions sur chasque intervalle puis essayer de les recoller. Attention il faut que la fonction recoller soit dérivable en tout point.

— Chercher des solutions sous des formes particulière (séries entière, polynomiale). ON a vu que si $f$ est dérivable en série entière alors $f'$ est aussi une série entière de même rayon de convergence. Ainsi l'équation différentielle implique des relations entre les coefficients de la série entière.

**Exemple 7.8.** *Déterminer une solution DSE de*

$$2t(t+1)x''(t) + (5t+3)x'(t) + x(t) = 0.$$

*On suppose qu'il existe une solution $f$ non identiquement nulle et DSE sur $]-R, R[$ pour un certain $R$. On la note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors on sait que sue $]-R, R[$, on a*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n,$$

*et*

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n,$$

*On peut donc en déduire les DSEs de $xf''(x)$, $x^2 f''(x)$ et $xf'(x)$. En injectant dans l'équation différentielle, on obtient que*

$$a_0 + 3a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2n(n+1)a_{n+1} + 2n(n-1)a_n + 5na_n + 3(n+1)a_{n+1} + a_n\right) s^n = 0.$$

*Par unicité du DSE, on a donc*

$$\begin{cases} a_0 + 3a_1 = 0, \\ \forall n \geqslant 1, (2n+3)a_{n+1} + (2n+1)a_n = 0 \end{cases}$$

*Ainsi par récurence pour tout* $n \geqslant 0$, $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} a_0$ *et*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1}. \\ &= a_0 \frac{arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

# Table des matières

# Bibliographie

**Livres de cours d'Analyse, niveau $2^{ème}$ année**

On trouve trois types d'ouvrages intéressants pour vous

## Livres de prépas

L'avantage des livres de maths de prépas est qu'ils sont très complets, très rigoureux, ils vont présenter beaucoup d'exemples et d'exercices (éventuellement corrigés dans d'autres tomes) mais l'inconvénient est que le programme couvert dépasse celui de ce cours). On peut penser par exemple à des ouvrages comme :


— J.-M. ARNAUDIÈS, H. FRAYSSE, *Cours de Mathématiques, tome 2 : Analyse* , Dunod, Paris, 1988.
— J.-M. ARNAUDIÈS, , H. FRAYSSE, *Cours de Mathématiques, tome 3 : Compléments d'Analyse* , Dunod, Paris, 1988.
— DONEDDU, *Cours de Mathématiques, Mathématiques Spéciales et Premier cycle universitaire, tome 8 : Analyse*, Vuibert, Paris, 1985.
— B. GOSTIAUX, *Cours de Mathématiques Spéciales, tome 2 : Topologie et Analyse réelle*, P. U. F., Paris, 1993.
— B. GOSTIAUX, *Cours de Mathématiques Spéciales, tome 3 : Analyse Fonctionnelle et Calcul Différentiel*, P. U. F., Paris, 1993.
— J. LELONG-FERRAND, J.-M. ARNAUDIèS, *Cours de Mathématiques, tome 2 : Analyse*, $4^{ème}$ édition, Dunod, Paris, 1977
— RAMIS, C. DESCHAMPS, J. ODOUX,*Cours de Mathématiques Spéciales, tome 3 : Topologie et éléments d'Analyse*, $2^{ème}$ édition, Masson, Paris, 1982.


## Livres universitaires généralistes

On est généralement sur des ouvrages moins exhaustifs où par exemple les notions de limsup ne sont pas systématiquement abordés, de plus les contenus des programmes varient au cours du temps. On peut citer par exemple :


— [$C$.5] J. DIXMIER, *Cours de Mathématiques de $1^{er}$ cycle, $2^{ème}$ année*, $2^{ème}$ édition, Gauthier-Villars, Paris, 1977
— P. KRÉE, J. VAUTHIER, *Mathématiques, $2^{ème}$ année du D.E.U.G., Analyse, Algèbre, Géométrie*, $3^{ème}$ édition, Éditions Eska, Paris

— Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini ; Joël Benoist, Hassan Boualem, Robert Brouzet, ..., *Mathématiques L2 : cours complet avec 700 tests et exercices corrigés* (Lb 0 MAT)

## Livres spécialisés

— J. COMBES *Suites et Séries*, Presses universitaires de France, éditions de 1982 puis 95
— W. RUDIN *Principes d'analyse mathématique*, Ediscience international, Paris, 1995.
— G. VALIRON, *Théorie des fonctions*, $3^{ème}$ édition, Masson, Paris 1966.
Un ouvrage ancien au style "rétro" qui traite d'Analyse dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, tel qu'on le présentait à l'époque, c'est donc une source d'exemples et où l'on trouve une foule de choses sur les limites supérieures et inférieures. C'est aussi l'occasion de se rendre compte de l'évolution de la façon de présenter les choses en mathématiques.