Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne — L3 MIASHS
2023/24 — M. Gourdel

Intégration - Probabilités
TD 10

Exercice 1

On considère f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x^3 \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ puis $g(x) = f(x)\mathbf{1}_{]a,b]}$

1. *Montrer que f est mesurable pour la tribu de Lebesgue.*
2. *Montrer que f n'est pas intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($f \notin \mathcal{L}^1((\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})\lambda), (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$.*
3. *Montrer que g intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($g \in \mathcal{L}^1$).*
4. *En utilisant une fonction h judicieusement choisie telle que $h = g$ λ-presque partout, calculer $\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda$.*

Exercice 2

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu_C)$ (mesure de comptage). On considère les fonctions $f(k) = \frac{1}{k^2}$ et pour tout $n \geq 0$ et pour n entier, $f_n(k) = \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2}$

1. *On considère k fixé, montrer que la suite $f_n(k) \to f(k)$ quand $n \to +\infty$. Interpréter ceci en termes de convergence simple.*
2. *La suite (f_n) est-elle croissante ?*
3. *Montrer qu'il existe M tel que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$*

$$\left| \frac{n^2 - 27n + k}{(k + n^2)} \right| \leq M$$

4. *En déduire que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 27n + k}{(k + n^2)k^2} \to_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad (1)$$

Exercice 3

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de [0, 2] dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0, 2]$, par : $f_n(x) := e^{-nx}\cos(nx)$.

1. *L'espace $([0, 2], \mathcal{B}([0, 2]), \lambda)$ est-il un espace de probabilité ? de mesure finie ?*
2. *Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers 0 (la fonction nulle) Lebesgue-presque partout sur $[0, 2]$.*
3. *Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement le théorème de Beppo-Levi ?*
4. *Montrer que il existe M tel que $n \in N$, pour tout $x \in [0, 2]$, $|f_n(x)| \leq M$. Interpréter en termes de domination.*
5. *En déduire que $\int_0^2 f_n(x) \, dx \to 0$.*