Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne — L3 MIASHS
2023/24 — M. Gourdel

Intégration - Probabilités
TD 11

EXERCICE 1 *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On rappelle que la fonction caractéristique de X est la fonction de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des complexes*[1] $\mathbb{C}$ *définie par* $\Phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{iuX})$. *En utilisant le théorème de transfert, on a donc*

$$\Phi_X(u) = \int_\Omega e^{iuX(\omega)}\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} e^{iux}\, d\mathbb{P}_X(x)$$

1. *Justifier que le domaine de définition de Φ_X est $\mathbb{R}$.*
2. *Justifier que si X_1 et X_2 ont même loi alors elles ont même fonctions caractéristique.*
3. *Montrer que si Y est la variable aléatoire définie par $Y = aX + b$, alors pour tout t de $\mathbb{R}$, $\Phi_Y(t) = e^{ibt}\Phi_X(at)$.*
4. *On a expliqué en cours que si X suit une loi normale centrée réduite, alors $\Phi_X(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$. On suppose que $Z = m + \sigma X$.*
   a) *Quelle loi suit Z.*
   b) *Déterminer $\Phi_Z(t)$.*
5. *Montrer que si X est une variable aléatoire symétrique (voir exercice 3 du TD9) alors $\Phi_X = \Phi_{-X}$ et donc que Φ_X est une fonction paire.*
6. *Montrer que si X est une variable aléatoire symétrique, alors Φ_X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (que sa partie imaginaire est nulle).*
7. *A l'aide du théorème de continuité sous l'intégrale, montrer que Φ_X est une fonction continue.*

EXERCICE 2

Soit X une variable aléatoire réelle discrète finie. On utilisera systématiquement les notations classiques $X \rightsquigarrow (p_k, x_k)_{1\le k\le n}$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$ en supposant de plus que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ et que $p_k > 0$ pour chaque k. On a donc $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

1. *On suppose que $X \rightsquigarrow (p_k, x_k)_{1\le k\le n}$ et que $Y \rightsquigarrow (q_\ell, y_\ell)_{1\le \ell\le m}$. Montrer que X et Y ont même loi (c'est-dire $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$) si et seulement si $m = n$, $p_1 = q_1$, $\ldots$, $p_n = q_n$ et $x_1 = y_1$, $\ldots$, $x_n = y_n$.*
2. *Vérifier que pour tout t,*
$$\Phi_X(t) = p_1 e^{itx_1} + \ldots + p_n e^{itx_n}.$$
3. *En déduire que ses parties réelles et imaginaires sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que la kième dérivée vérifie $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}(X^k)$.*

1. On relira au besoin par exemple `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_complexe` et en particulier `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_complexe#Forme_polaire_2` pour s'assurer que l'on maîtrise les concepts de module, argument, partie réelle, partie imaginaire.

Exercice 3

1. *Montrer que la fonction* $h : [0,1]\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $h(x,y) = e^{-y}\sin(2xy)$ *est une fonction intégrable.*
2. *On définit pour la fonction* $I(x) = \int_0^{+\infty} h(x,y)\,dy$.
   - *a) à l'aide d'une intégration par parties, montrer que* $I(x) = 2x\int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(2xy)\,dy$.
   - *b) à l'aide d'une deuxième intégration par parties, en déduire que* $I(x) = \frac{2x}{1+4x^2}$.
3. *En déduire* $\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} h(x,y)\,dy\right)\,dx$.
4. *Déduire du théorème de Fubini la valeur de* $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 h(x,y)\,dx\right)\,dy$.
5. *Que vaut* $\int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{(\sin y)^2}{y}\,dy$ *?*

Exercice 4

Soit f *et* g *deux fonctions intégrables de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}_+$. *On définit l'application* $f\star g$ *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *par*

$$(f\star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,d\lambda_n(y).$$

1. *Pour* y *fixé dans* $\mathbb{R}^n$, *on considère* $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *défini par* $\Phi(x) = x - y$. *Montrer que* Φ *est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour* $U = \mathbb{R}^n$ *pour justifier que*
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,d\lambda_n(x).$$
2. *Appliquer le théorème de Fubini pour montrer que* $\int_{\mathbb{R}^n}(f\star g)(x)\,d\lambda_n(x) < +\infty$ *puis en déduire que* $f\star g(x)$ *existe presque partout sur* $\mathbb{R}^n$.
3. *Pour* x *fixé dans* $\mathbb{R}^n$, *on considère* $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *défini par* $\Psi(y) = x - y$. *Montrer que* Φ *est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour justifier que* $f\star g = g\star f$.

Compléments

Définition Si une variable aléatoire X est définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on dit que X possède un moment d'ordre k (où $k \in \mathbb{N}$) si X^k est une variable intégrable et on appelle alors moment d'ordre k la quantité $\mathbb{E}(X^k)$.

Lemme Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes finies qui sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, X et Y possèdent un moment d'ordre k identique alors X et Y ont même loi.

EXERCICE 5

On suppose que toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dans cet exercice toutes les lois seront des lois discrètes finies. On adoptera systématiquement les notations et conventions de l'exercice 2 par exemple, si $X \rightsquigarrow (p_k, x_k)_{1 \leq k \leq n}$ alors les probabilités p_k sont strictement positives tandis que les valeurs prises sont correctement rangées $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Le but de l'exercice est de montrer directement que dans le cas discret finie, $\Phi_X = \Phi_Y$ entraîne l'égalité en loi X et Y MAIS sans utiliser le théorème admis en cours.

Préambule.

1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ par exemple $\alpha = -x_1$. On note $\tilde{X} = X - \alpha$ et $\tilde{Y} = Y - \alpha$. Montrer que $\Phi_{\tilde{X}} = \Phi_{\tilde{Y}}$ si et seulement si $\Phi_X = \Phi_Y$ et que $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ ont même loi si et seulement si X et Y ont même loi.*

   En conséquence, il est possible de supposer désormais que X et Y sont à valeurs positives.

2. *On se donne X et Y, si $\Phi_X = \Phi_Y$. Montrer que pour tout entier k, $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$.*

3. *Montrer en utilisant le lemme que X et Y ont même loi.*

Preuve d'un cas particulier du lemme, X et Y va positives

4. *On se donne une va positive $U \rightsquigarrow (\pi_i, u_i)_{1 \leq k \leq n}$, montrer que si $u_n > 0$ alors on a un équivalent au sens des suites $\sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} \pi_i u_i^k \sim \pi_n \tilde{u}_n^k$ quand $k \to +\infty$.*

5. *Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $r > 0$ et $s > 0$. Montrer que si $\alpha r^k \sim \beta s^k$ quand $k \to +\infty$, alors $\alpha = \beta$ et $r = s$.*

   On veut montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que l'implication suivante (P_n) est vraie

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \\ 0 \leq y_1 < y_2 < \ldots < y_m \\ p_i > 0 \text{ pour } i \in \{1, \ldots, n\} \\ q_j > 0 \text{ pour } j \in \{1, \ldots, m\} \\ \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} p_i x_i^k = \sum_{j \in \{1,\ldots,m\}} q_j y_j^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m = n \\ p_i = q_i \text{ pour } i \in \{1, \ldots, n\} \\ x_i = y_i \text{ pour } i \in \{1, \ldots, n\} \end{array}\right.$$

6. *Montrer que P_1 est vrai. On distinguera le cas $x_1 = 0$ puis le cas $x_1 > 0$.*

7. *On suppose comme hypothèse de récurrence que pour un certain entier $n \geq 2$ la condition P_{n-1} est vraie. On veut montrer que P_n est vraie. On se donne $(p_k, x_k)_{1 \leq k \leq n+1}$, et*

$(q_k, y_k)_{1\leq k\leq m}$ *tels que*

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \\ 0 \leq y_1 < y_2 < \ldots < y_m \\ p_i > 0 \text{ pour } i \in \{1, \ldots, n+1\} \\ q_j > 0 \text{ pour } j \in \{1, \ldots, m\} \\ \sum_{i\in\{1,\ldots,n+1\}} p_i x_i^k = \sum_{j\in\{1,\ldots,m\}} q_j y_j^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) Montrer que le cas $m = 1$ revient à se placer dans le cas $n = 1$.

(b) On supposera $m \geq 2$ afin de poser $m = m' + 1$ et réécrire le système en :

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \\ 0 \leq y_1 < y_2 < \ldots < y_{m'+1} \\ p_i > 0 \text{ pour } i \in \{1, \ldots, n+1\} \\ q_j > 0 \text{ pour } j \in \{1, \ldots, m'+1\} \\ \sum_{i\in\{1,\ldots,n+1\}} p_i x_i^k = \sum_{j\in\{1,\ldots,m'+1\}} q_j y_j^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que $p_{n+1} = q_{m'+1}$ et $x_{n+1} = y_{m'+1}$. Dit autrement les plus grandes valeurs sont égales et atteintes avec la même probabilité.

(c) Utiliser l'hypothèse de récurrence pour montrer que P_{n+1} est vraie.