Partiel - Mathématiques
Durée 1h30
Ni calculatrice, ni documents
S4

Exercice 1 : Domaine de définition, limites et asymptotes (5 pts)

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{kx^3 - x}{x^2 + 1}$ avec $k < 0$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(\cdot)$ en justifiant précisément votre réponse. (1 pt)
2. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. Préciser, au besoin, les formes indéterminées et justifier votre démarche. (2 pts)
3. Indiquer si la fonction admet une ou plusieurs asymptotes et si tel est le cas, donner sa (ou leur) équation. Si vous devez chercher l'équation d'une asymptote oblique en $\pm\infty$ alors déterminez l'équation en $+\infty$ ou en $-\infty$. (2 pts)

Exercice 2 : Fonction réciproque (2 pts)

Soit la fonction $f(x) = 2 + \dfrac{2}{x^2}$

1. Démontrer que la fonction $f(\cdot)$ admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}_+^*$. (1 pt)
2. Déterminer $f^{-1}(x)$ en détaillant vos calculs. (1 pt)

Exercice 3 : Dérivées, extremum et nature des extremum (5 pts)

Soit la fonction $f(x) = 3x^4 - 6x^2 - 15$.

1. Calculer les dérivées première et seconde de la fonction $f(\cdot)$. (1 pt)
2. Déterminer le(s) éventuel(s) point(s) candidat(s) à un extremum. (1 pt)
3. Préciser, en justifiant, la nature de(s) éventuel(s) point(s) candidat(s) à un extremum. (1 pt)
4. Est-ce que la fonction admet un ou des extrema globaux ? (1 pt)
5. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de $f(\cdot)$ en $x = 0$. (1 pt)

Exercice 4 : Intervalles de concavité/convexité (2 pts)

Soit la fonction $f(x) = (x - 4) \times \sqrt{x}$.

En tenant compte du domaine de définition, déterminer les intervalles de concavité/convexité et les éventuels points d'inflexion sur le domaine de définition de la fonction $f(\cdot)$. (2 pts)

Exercice 5 : Fonction à deux variables (4 pts)

Soit la fonction $g(x; y) = \sqrt{y} + x^2y^3$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $g(\cdot)$ en justifiant précisément votre réponse. (1 pt)
2. Calculer les dérivées partielles premières. (1 pt)
3. Calculer la différentielle totale au niveau du couple $(1; 1)$ lorsque $dx = 0,1$ et $dy = 0,1$. Interpréter le résultat obtenu. (1 pt)
4. Calculer les dérivées partielles secondes (1 pt)

Exercice 6 : Propriétés des log et exp (2 pts).

Vous indiquerez le numéro de la question ainsi que la ou les bonne réponses sur votre COPIE.
Pour obtenir 0,5 point, la ou les bonnes réponses doivent apparaitre sans réponse(s) fausse(s).

Question 1 : propriété du log.

a) $\ln x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $\ln x > 0, \forall x \in]0; 1[$

b) $\ln x > 0, \forall x \in \mathbb{R}_*^+$

d) $\ln x > 0, \forall x \in]1; +\infty[$

Question 2 : propriété de la réciprocité.

a) $e^{\ln x} = x, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $e^{\ln x} = 1, \forall x > 0$

b) $e^{\ln x} = x, \forall x \in \mathbb{R}^+$

d) $e^{\ln x} = x, \forall x > 1$

Question 3 : dérivation.

a) $\left(\ln(2x^2+1)\right)' = (4x) \times \ln(2x^2+1)$

c) $\left(\ln(2x^2+1)\right)' = \dfrac{4x}{2x^2+1}$

b) $\left(\ln(2x^2+1)\right)' = \dfrac{4x}{\ln(2x^2+1)}$

d) $\left(\ln(2x^2+1)\right)' = \dfrac{4}{\ln(2x^2+1)}$

Question 4 : calcul de limite.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x^2+10)}{x^2+10}\right) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x^2+10)}{x^2+10}\right) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x^2+10)}{x^2+10}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x^2+10)}{x^2+10}\right) = 0$

Exercice BONUS : Application du TVI.

Soit la fonction $f(x) = x^3 + 3x - 5$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $I = [0; 2]$.