Partiel - Mathématiques
Durée 1h30
Ni calculatrice, ni documents
S1

Exercice 1 : Domaine de définition, limites et asymptotes (5 pts)

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{kx^3 - 3}{x^2 + 2}$ avec $k > 0$.

1. **Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(\cdot)$ en justifiant précisément votre réponse. (1 pt)**
   La fonction est définie si $x^2 + 2 \neq 0$. Or, $x^2 \neq -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

2. **Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. Préciser, au besoin, les formes indéterminées et justifier votre démarche. (2 pts)**
   - Limite en $+\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est une forme indéterminée du type $= \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Pour lever l'indétermination, on utilise les équivalents. En sachant, d'une part, qu'un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en $\pm\infty$ et, d'autre part, qu'il est possible de diviser des équivalents.

   $\dfrac{kx^3 - 3}{x^2 + 2} \sim_\infty \dfrac{kx^3}{x^2} = kx$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} kx = +\infty$ car $k > 0$.

   Autre méthode : on factorise par le terme dominant : $\dfrac{kx^3 - 3}{x^2 + 2} = \dfrac{x^3(k - \frac{3}{x^3})}{x^2(1 + \frac{2}{x^2})} = \dfrac{x(k - \frac{3}{x^3})}{(1 + \frac{2}{x^2})}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(k - \frac{3}{x^3})}{(1 + \frac{2}{x^2})} = +\infty$

   Autre méthode : les conditions sont réunies pour appliquer la règle de l'Hospital : $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{kx^3 - 3}{x^2 + 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{3kx^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{6kx}{2} = +\infty$

   - Limite en $-\infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} kx = -\infty$ car $k > 0$.

3. **Indiquer si la fonction admet une ou plusieurs asymptotes et si tel est le cas, donner sa (ou leur) équation. Si vous devez chercher l'équation d'une asymptote oblique en $\pm\infty$ alors déterminez l'équation en $+\infty$ ou en $-\infty$. (2 pts)**
   La fonction n'admet ni asymptotes verticales, pas de valeurs interdites dans le domaine de définition **(0,25 pt)** ni asymptotes horizontales car les limites infinies sont infinies **(0,25 pt)**. Cependant, il existe éventuellement une asymptote oblique en $\pm\infty$.

   1reétape : on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{kx^3 - 3}{x^3 + 2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{kx^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} k = k$ donc il existe une asymptote oblique dont le coefficient directeur est k. **(0,75 pt)**

   2eétape : on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$ afin de déterminer l'ordonnée à l'origine de l'AO.
   $\dfrac{kx^3 - 3}{x^2 + 2} - kx = \dfrac{kx^3 - 3 - kx^3 - 2kx}{x^2 + 2} = \dfrac{-3 - 2kx}{x^2 + 2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3 - 2kx}{x^2 + 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2kx}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2k}{x} = 0$ **(0,75 pt)**

   La droite d'équation $y = kx$ est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 2 : Fonction réciproque (2 pts)

Soit la fonction $f(x) = 1 + \dfrac{4}{x}$

1. **Démontrer que la fonction $f(\cdot)$ admet une fonction réciproque sur son domaine de définition. (1 pt)**
   La fonction réciproque existe si la fonction est continue et monotone sur son domaine (ou une partie de son domaine).

La fonction est continue sur son domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}^*$. **(0,25 pt)**

Pour savoir si elle monotone, on étudie le signe de la dérivée première : $f'(x) = \frac{-4}{x^2}$ d'où $f'(x) < 0$ sur son domaine de définition. On en déduit que la fonction est strictement décroissante sur son domaine. **(0,75 pt)**

2. **Déterminer $f^{-1}(x)$ en détaillant vos calculs. (1 pt)**
   On réécrit la fonction ainsi : $y = 1 + \frac{4}{x}$ et on cherche à exprimer x en fonction de y.
   $y = 1 + \frac{4}{x} \Rightarrow y - 1 = \frac{4}{x} \Rightarrow x(y-1) = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{y-1}$ donc $f^{-1}(x) = \frac{4}{x-1}$

Exercice 3 : Dérivées, extremum et nature des extremum (5 pts)

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x - 10$.

1. **Calculer les dérivées première et seconde de la fonction $f(\cdot)$. (1 pt)**
   $f'(x) = 3x^2 - 3$ et $f''(x) = 6x$.

2. **Déterminer le(s) éventuel(s) point(s) candidat(s) à un extremum. (1 pt)**
   On cherche $x \in D_f$ tel que $f'(x) = 0$: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

3. **Préciser, en justifiant, la nature de(s) éventuel(s) point(s) candidat(s) à un extremum. (1 pt)**
   $f''(1) = 6 > 0$, c'est un minimum. $f''(-1) = -6 < 0$, c'est un maximum.

4. **Est-ce que la fonction admet un ou des extrema globaux ? (1 pt)**
   On constate que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc aucune image par $f(\cdot)$ ne peut être supérieure à $+\infty$. Il n'existe pas de max global. De plus, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ donc aucune image par $f(\cdot)$ ne peut être inférieure à $-\infty$. Il n'existe pas de min global.

5. **Déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$. (1 pt)**
   $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$. Or, $f'(1) = 0$ donc $y = f(1) = -12$
   La tangente est une droite horizontale pour un point candidat à un extremum.

Exercice 4 : Intervalles de concavité/convexité (2 pts)

Soit la fonction $f(x) = (x-1) \times \sqrt{x}$.

Déterminer les intervalles de concavité/convexité et les éventuelles points d'inflexion sur le domaine de définition de la fonction $f(\cdot)$. (2 pts)

$f'(x) = \sqrt{x} + (x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x} + x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ **(0,5 pt)**
$f''(x) = \frac{3(2\sqrt{x}) - (3x-1) \times 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{6\sqrt{x} - (3x-1) \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{(6\sqrt{x}\sqrt{x} - (3x-1)) \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{(6x - 3x + 1) \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{3x+1}{4x\sqrt{x}}$. **(1 pt)**

$f''(x) > 0$ quand $3x + 1 > 0$ ce qui est toujours vérifié sur le domaine de définition ($D_f = \mathbb{R}^+$). **(0,5 pt)** On en déduit que la fonction est convexe sur son domaine de définition. Elle n'admet pas de point d'inflexion car $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in D_f$.

Exercice 5 : Fonction à deux variables (4 pts)

Soit la fonction $g(x;y) = \sqrt{x} + xy$.

1. **Déterminer le domaine de définition de la fonction $g(\cdot)$ en justifiant précisément votre réponse. (1 pt)**
   $g(x;y)$ est définie si $x \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Donc, $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$

2. **Calculer les dérivées partielles premières. (1 pt)**
   $g'_x(x;y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + y$; $g'_y(x;y) = x$.

3. **Calculer la différentielle totale au niveau du couple** $(1;1)$ **lorsque** $dx = 0,1$ **et** $dy = 0,1$**. Interpréter le résultat obtenu. (1 pt)**
   $dg(1;1) = g'_x(1;1) \times dx + g'_y(1;1) \times dy = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{1}} + 1\right) dx + 1 \times dy = \dfrac{3}{2}dx + dy = 0,15 + 0,1 = 0,25$ **(1 pt)**
   Quand x et y augmentent de $0,1$ alors l'image par $g(\cdot;\cdot)$ varie approximativement de $0,25$ à partir du couple $(1;1)$. **(bonus 1 pt)**

4. **Calculer les dérivées partielles secondes (1 pt)**
   $g''_{xx}(x;y) = \dfrac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$; $g''_{xy}(x;y) = 1$; $g''_{yx}(x;y) = 1$; $g''_{yy}(x;y) = 0$.

Exercice 6 : Propriétés des log et exp (2 pts).
Vous indiquerez le numéro de la question ainsi que la ou les bonne réponses sur votre COPIE.
Pour obtenir 0,5 point, la ou les bonnes réponses doivent apparaitre sans réponse(s) fausse(s).

Question 1 : propriété du log. (0,5 pt)

a) $\ln x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $\ln x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$

c) $\ln x > 0$, $\forall x > 1$ **OK**

d) $\ln x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Question 2 : propriété de la réciprocité. (0,5 pt)

a) $\ln(e^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ **OK**

b) $\ln(e^x) = 0$, pour $x = 1$

c) $\ln(e^x) = 1$, pour $x = 0$

d) $\ln(e^x) = 1$, pour $x = 1$ **OK**

Question 3 : dérivation. (0,5 pt)

a) $\left(e^{2x-1}\right)' = (2x-1) \times e^{2x-1}$

b) $\left(e^{2x-1}\right)' = 2 \times e^{2x-1}$ **OK**

c) $\left(e^{2x-1}\right)' = 2x \times e^{2x-1}$

d) $\left(e^{2x-1}\right)' = (2x-1) \times e^{2x}$

Question 4 : calcul de limite. (0,5 pt)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+10}{e^{x+3}}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+10}{e^{x+3}}\right)$ n'existe pas.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+10}{e^{x+3}}\right) = 0^+$ **OK**

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+10}{e^{x+3}}\right) = -\infty$

Exercice BONUS : Application du TVI.

Soit la fonction $f(x) = x^3 + 2x - 5$**. Montrer que l'équation** $f(x) = 0$ **admet au moins une solution sur l'intervalle** $I = [-1;2]$**.**

$f(x)$ est continue sur l'intervalle I.
$f(-1) = -1 - 2 - 5 = -8$ et $f(2) = 8 + 4 - 5 = 7$. Comme $f(-1) < 0$ et $f(2) > 0$, on en déduit qu'il existe x tel que $f(x) = 0$.

Partiel - Mathématiques
Durée 1h30
Ni calculatrice, ni documents
S2

Exercice 1 : Domaine de définition, limites et asymptotes (5 pts)

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{2kx^3 - 4}{x^2 + 3}$ avec $k > 0$.

1. **Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(\cdot)$ en justifiant précisément votre réponse. (1 pt)**
La fonction est définie si $x^2 + 3 \neq 0$. Or, $x^2 \neq -3$, $\forall x \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

2. **Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. Préciser, au besoin, les formes indéterminées et justifier votre démarche. (2 pts)**
   - Limite en $+\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est une forme indéterminée du type $= \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Pour lever l'indétermination, on utilise les équivalents. En sachant, d'une part, qu'un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en $\pm\infty$ et, d'autre part, qu'il est possible de diviser des équivalents.

   $\dfrac{2kx^3 - 4}{x^2 + 3} \sim_\infty \dfrac{2kx^3}{x^2} = 2kx$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2kx = +\infty$ car $k > 0$.

   Autre méthode : on factorise par le terme dominant : $\dfrac{2kx^3 - 4}{x^2 + 3} = \dfrac{x^3(2k - \frac{4}{x^3})}{x^2(1 + \frac{3}{x^2})} = \dfrac{x(2k - \frac{4}{x^3})}{(1 + \frac{3}{x^2})}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(2k - \frac{4}{x^3})}{(1 + \frac{3}{x^2})} = +\infty$

   Autre méthode : les conditions sont réunies pour appliquer la règle de l'Hospital : $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{2kx^3 - 4}{x^2 + 3} = \lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{6kx^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{12kx}{2} = +\infty$

   - Limite en $-\infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2kx = -\infty$ car $k > 0$.

3. **Indiquer si la fonction admet une ou plusieurs asymptotes et si tel est le cas, donner sa (ou leur) équation. Si vous devez chercher l'équation d'une asymptote oblique en $\pm\infty$ alors déterminez l'équation en $+\infty$ ou en $-\infty$. (2 pts)**

   La fonction n'admet ni asymptotes verticales, pas de valeurs interdites **(0,25 pt)** ni asymptotes horizontales car les limites infinies sont infinies **(0,25 pt)**. Cependant, il existe éventuellement une asymptote oblique en $\pm\infty$.

   1reétape : on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2kx^3 - 4}{x^3 + 3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2kx^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2k = 2k$ donc il existe une asymptote oblique dont le coefficient directeur est $2k$. **(0,75 pt)**

   2eétape : on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2kx)$ afin de déterminer l'ordonnée à l'origine de l'AO.

   $\dfrac{2kx^3 - 4}{x^2 + 3} - 2kx = \dfrac{kx^3 - 4 - 2kx^3 - 6kx}{x^2 + 3} = \dfrac{-4 - 6kx}{x^2 + 3}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4 - 6kx}{x^2 + 3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-6kx}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-6k}{x} = 0$ **(0,75 pt)**

   La droite d'équation $y = 2kx$ est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 2 : Fonction réciproque (2 pts)

Soit la fonction $f(x) = 1 + \dfrac{4}{x^2}$

1. **Démontrer que la fonction $f(\cdot)$ admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}_+^*$. (1 pt)**
La fonction réciproque existe si la fonction est continue et monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. **(0,25 pt)**

Pour savoir si elle monotone, on étudie le signe de la dérivée première sur $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \frac{-8}{x^3}$ d'où $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. **(0,75 pt)**

2. **Déterminer $f^{-1}(x)$ en détaillant vos calculs. (1 pt)**
On réécrit la fonction ainsi : $y = 1 + \frac{4}{x^2}$ et on cherche à exprimer x en fonction de y.
$y = 1 + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y - 1 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^2(y-1) = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{y-1} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{y-1}}$ donc $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{4}{x-1}}$

Exercice 3 : Dérivées, extremum et nature des extremum (5 pts)

Soit la fonction $f(x) = x^4 - 2x^2 - 10$.

1. **Calculer la dérivée première et seconde de la fonction $f(\cdot)$. (1 pt)**
$f'(x) = 4x^3 - 4x$ et $f''(x) = 12x^2 - 4$.

2. **Déterminer le(s) éventuel(s) point(s) candidat(s) à un extremum. (1 pt)**
On cherche $x \in D_f$ tel que $f'(x) = 0$: $4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

3. **Préciser, en justifiant, la nature de(s) éventuel(s) point(s) candidat(s) à un extremum. (1 pt)**
$f''(0) = -4 < 0$, c'est un maximum ; $f''(1) = 8 > 0$, c'est un minimum. $f''(-1) = 8 > 0$, c'est un minimum.

4. **Est-ce que la fonction admet un ou des extrema globaux ? (1 pt)**
On constate que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc aucune image par $f(\cdot)$ ne peut être supérieure à $+\infty$. Il n'existe pas de max global. De plus, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ donc les points $(1; f(1))$ et $(-1; f(-1))$ sont des min globaux. Ces deux points sont mim globaux en même temps car $f(1) = f(-1) = -11$.

5. **Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$. (1 pt)**
$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or, $f'(0) = 0$ donc $y = f(0) = -10$
La tangente est une droite horizontale pour un point candidat à un extremum.

Exercice 4 : Intervalles de concavité/convexité (2 pts)

Soit la fonction $f(x) = (x - 2) \times \sqrt{x}$.

En tenant compte du domaine de définition, déterminer les intervalles de concavité/convexité et les éventuels points d'inflexion sur le domaine de définition de la fonction $f(\cdot)$. (2 pts)

$f'(x) = \sqrt{x} + (x-2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x} + x - 2}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x - 2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 2}{2\sqrt{x}}$ **(0,5 pt)**

$f''(x) = \frac{3(2\sqrt{x}) - (3x-2) \times 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{6\sqrt{x} - (3x-2) \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{(6\sqrt{x}\sqrt{x} - (3x-2)) \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{(6x - 3x + 2) \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{3x + 2}{4x\sqrt{x}}$. **(1 pt)**

$f''(x) > 0$ quand $3x + 2 > 0$ ce qui est toujours vérifié sur le domaine de définition ($D_f = \mathbb{R}^+$). **(0,5 pt)** On en déduit que la fonction est convexe sur son domaine de définition. Elle n'admet pas de point d'inflexion car $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in D_f$.

Exercice 5 : Fonction à deux variables (4 pts)

Soit la fonction $g(x; y) = \sqrt{y} + xy$.

1. **Déterminer le domaine de définition de la fonction $g(\cdot)$ en justifiant précisément votre réponse. (1 pt)**
   $g(x;y)$ est définie si $y \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Donc, $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$

2. **Calculer les dérivées partielles premières. (1 pt)**
   $g'_x(x;y) = y\,;\, g'_y(x;y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} + x\,;\,.$

3. **Calculer la différentielle totale au niveau du couple $(1;4)$ lorsque $dx = 0,1$ et $dy = 0,1$. Interpréter le résultat obtenu. (1 pt)**
   $dg(1;1) = g'_x(1;4) \times dx + g'_y(1;4) \times dy = 4dx + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{4}} + 1\right) dy = 4dx + \dfrac{5}{4} dy = 0,4 + 1,25 = 1,65$ **(1 pt)**
   Quand x et y augmentent de $0,1$ alors l'image par $g(\cdot;\cdot)$ varie approximativement de $1,65$ à partir du couple $(1;4)$. **(bonus 1 pt)**

4. **Calculer les dérivées partielles secondes (1 pt)**
   $g''_{xx}(x;y) = 0\,;\, g''_{xy}(x;y) = 1\,;\, g''_{yy}(x;y) = \dfrac{-1}{4y^{\frac{3}{2}}}\,;\, g''_{yx}(x;y) = 1.$

Exercice 6 : Propriétés des log et exp (2 pts).
Vous indiquerez le numéro de la question ainsi que la ou les bonne réponses sur votre COPIE.
Pour obtenir 0,5 point, la ou les bonnes réponses doivent apparaitre sans réponse(s) fausse(s).

Question 1 : propriété de l'exponentielle.

a) $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ **OK**

b) $e^x = 0$, quand $x = 0$

c) $e^x < 0$, quand $x < 0$

d) $e^x < 0$, quand $x < 1$

Question 2 : propriété de la réciprocité.

a) $e^{\ln x} = x, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $e^{\ln x} = x, \forall x \in \mathbb{R}^+_*$ **OK**

c) $e^{\ln x} = x$, pour $x = 0$

d) $e^{\ln x} = 1$, pour $x = 1$ **OK**

Question 3 : dérivation

a) $(\ln(2x-1))' = (2x-1) \times e^{2x-1}$

b) $(\ln(2x-1))' = \dfrac{2x}{2x-1}$

c) $(\ln(2x-1))' = 2 \times \ln(2x-1)$

d) $(\ln(2x-1))' = \dfrac{2}{2x-1}$ **OK**

Question 4 : calcul de limite.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{100 \times \ln x}{e^{x+100}}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{100 \times \ln x}{e^{x+100}}\right) = 0^+$ **OK**

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{100 \times \ln x}{e^{x+100}}\right) = 0^-$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{100 \times \ln x}{e^{x+100}}\right) = -\infty$

Exercice BONUS : Application du TVI.

Soit la fonction $f(x) = x^3 + 3x - 7$. <u>Montrer</u> que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $J = [-2;2]$.
$f(x)$ est continue sur l'intervalle I.
$f(-2) = -8-6-7 = -21$ et $f(2) = 8+6-7 = 7$. Comme $f(-2) < 0$ et $f(2) > 0$, on en déduit qu'il existe x tel que $f(x) = 0$.

Partiel - Mathématiques
Durée 1h30
Ni calculatrice, ni documents
S3

Exercice 1 : Domaine de définition, limites et asymptotes (5 pts)

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{kx^3 - 2x}{x^2 + 4}$ avec $k > 0$.

1. **Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(\cdot)$ en justifiant précisément votre réponse. (1 pt)**
La fonction est définie si $x^2 + 4 \neq 0$. Or, $x^2 \neq -4 \ \forall x \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

2. **Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. Préciser, au besoin, les formes indéterminées et justifier votre démarche. (2 pts)**
   - Limite en $+\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est une forme indéterminée du type $= \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Pour lever l'indétermination, on utilise les équivalents. En sachant, d'une part, qu'un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en ∞ et, d'autre part, qu'il est possible de diviser des équivalents.

   $\dfrac{kx^3 - 2x}{x^2 + 4} \sim_\infty \dfrac{kx^3}{x^2} = kx$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} kx = +\infty$ car $k > 0$.

   Autre méthode : on factorise par le terme dominant : $\dfrac{kx^3 - 2x}{x^2 + 4} = \dfrac{x^3(k - \frac{2}{x^2})}{x^2(1 + \frac{4}{x^2})} = \dfrac{x(k - \frac{2}{x^2})}{(1 + \frac{4}{x^2})}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(k - \frac{2}{x^2})}{(1 + \frac{4}{x^2})} = +\infty$

   - Limite en $-\infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} kx = -\infty$ car $k > 0$.

3. **Indiquer si la fonction admet une ou plusieurs asymptotes et si tel est le cas, donner sa (ou leur) équation. Si vous devez chercher l'équation d'une asymptote oblique en $\pm\infty$ alors déterminez l'équation en $+\infty$ ou en $-\infty$. (2 pts)**
La fonction n'admet ni asymptotes verticales, pas de valeurs interdites **(0,25 pt)** ni asymptotes horizontales car les limites infinies sont infinies **(0,25 pt)**. Cependant, il existe éventuellement une asymptote oblique en $\pm\infty$.

   1^re^étape : on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{kx^3 - 2x}{x^3 + 4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{kx^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} k = k$ donc il existe une asymptote oblique dont le coefficient directeur est k. **(0,75 pt)**

   2^e^étape : on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$ afin de déterminer l'ordonnée à l'origine de l'AO.
   $\dfrac{kx^3 - 2x}{x^2 + 4} - kx = \dfrac{kx^3 - 2x - kx^3 - 4kx}{x^2 + 4} = \dfrac{-2x - 4kx}{x^2 + 4}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x(1 - 2k)}{x^2 + 4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x(1 - 2k)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2(1 - 2k)}{x} = 0$ **(0,75 pt)**

   La droite d'équation $y = kx$ est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 2 : Fonction réciproque (2 pts)

Soit la fonction $f(x) = 2 + \dfrac{2}{x}$

1. **Démontrer que la fonction $f(\cdot)$ admet une fonction réciproque sur son domaine de définition. (1 pt)**
La fonction réciproque existe si la fonction est continue et monotone sur son domaine (ou une partie de son domaine).
La fonction est continue sur son domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}^*$. **(0,25 pt)**

Pour savoir si elle monotone, on étudie le signe de la dérivée première : $f'(x) = \frac{-2}{x^2}$ d'où $f'(x) < 0$ sur son domaine de définition. On en déduit que la fonction est strictement décroissante sur son domaine. **(0,75 pt)**

2. **Déterminer $f^{-1}(x)$ en détaillant vos calculs. (1 pt)**
   On réécrit la fonction ainsi : $y = 2 + \frac{2}{x}$ et on cherche à exprimer x en fonction de y.
   $y = 2 + \frac{2}{x} \Rightarrow y - 2 = \frac{2}{x} \Rightarrow x(y-2) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{y-2}$ donc $f^{-1}(x) = \frac{2}{x-2}$

Exercice 3 : Dérivées, extremum et nature des extremum (5 pts)

Soit la fonction $f(x) = 3x^3 - 9x - 17$.

1. **Calculer les dérivées première et seconde de la fonction $f(\cdot)$. (1 pt)**
   $f'(x) = 9x^2 - 9$ et $f''(x) = 18x$.

2. **Déterminer le(s) éventuel(s) point(s) candidat(s) à un extremum. (1 pt)**
   On cherche $x \in D_f$ tel que $f'(x) = 0$: $9x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

3. **Préciser, en justifiant, la nature de(s) éventuel(s) point(s) candidat(s) à un extremum. (1 pt)**
   $f''(1) = 18 > 0$, c'est un minimum. $f''(-1) = -18 < 0$, c'est un maximum.

4. **Est-ce que la fonction admet un ou des extrema globaux ? (1 pt)**
   On constate que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc aucune image par $f(\cdot)$ ne peut être supérieure à $+\infty$. Il n'existe de max global. De plus, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ donc aucune image par $f(\cdot)$ ne peut être inférieure à $-\infty$. Il n'existe pas de min global.

5. **Déterminer l'équation de la tangente en $x = -1$. (1 pt)**
   $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$. Or, $f'(-1) = 0$ donc $y = f(-1) = -11$
   La tangente est une droite horizontale pour un point candidat à un extremum.

Exercice 4 : Intervalles de concavité/convexité (2 pts)

Soit la fonction $f(x) = (x-3) \times \sqrt{x}$.

Déterminer les intervalles de concavité/convexité et les éventuelles points d'inflexion sur le domaine de définition de la fonction $f(\cdot)$. (2 pts)

$f'(x) = \sqrt{x} + (x-3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \times \sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$ **(0,5 pt)**

$f''(x) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2} \times \frac{-1}{2} \times \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{4x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{4(\sqrt{x})^3} = \frac{3}{4\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. **(1 pt)**

$f''(x) > 0$ quand $1 + \frac{1}{x} > 0$ ce qui est toujours vérifié sur le domaine de définition ($D_f = \mathbb{R}^+$). **(0,5 pt)** On en déduit que la fonction est convexe sur son domaine de définition. Elle n'admet pas de point d'inflexion car $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in D_f$.

Exercice 5 : Fonction à deux variables (4 pts)

Soit la fonction $g(x;y) = \sqrt{x} + 2x^2y^2$.

1. **Déterminer le domaine de définition de la fonction $g(\cdot)$ en justifiant précisément votre réponse. (1 pt)**
   $g(x;y)$ est définie si $x \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Donc, $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$

2. **Calculer les dérivées partielles premières. (1 pt)**
   $g'_x(x;y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 4xy^2$; $g'_y(x;y) = 4x^2y$.

3. **Calculer la différentielle totale au niveau du couple** $(4;1)$ **lorsque** $dx = 0,1$ **et** $dy = 0,1$**. Interpréter le résultat obtenu. (1 pt)**
$dg(4;1) = g'_x(4;1) \times dx + g'_y(4;1) \times dy = \left(\frac{1}{2\sqrt{4}} + 4 \times 4 \times 1\right) dx + (4 \times 16 \times 1) \times dy = 16,25dx + 64dy = 1,625 + 6,4 = 8,025$ **(1 pt)**
Quand x et y augmentent de $0,1$ alors l'image par $g(\cdot;\cdot)$ varie approximativement de $8,025$ à partir du couple $(4;1)$. **(bonus 1 pt)**

4. **Calculer les dérivées partielles secondes (1 pt)**
$g''_{xx}(x;y) = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}} + 4y^2$; $g''_{xy}(x;y) = 4xy$; $g''_{yx}(x;y) = 4xy$; $g''_{yy}(x;y) = 4x^2$.

Exercice 6 : Propriétés des log et exp (2 pts).
Vous indiquerez le numéro de la question ainsi que la ou les bonne réponses sur votre COPIE.
Pour obtenir 0,5 point, la ou les bonnes réponses doivent apparaitre sans réponse(s) fausse(s).

Question 1 : propriété du log.

a) $\ln x < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $\ln x < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$

c) $\ln x < 0$, $\forall x \in \,]0;1[$ **OK**

d) $\ln x < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^-$

Question 2 : propriété de la réciprocité.

a) $\ln(e^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ **OK**

b) $\ln(e^x) = 0$, quand $x = 1$

c) $\ln(e^x) = 0$, quand $x = -1$

d) $\ln(e^x) = 1$, quand $x = 1$ **OK**

Question 3 : dérivation.

a) $\left(e^{3x^2}\right)' = (3x^2) \times e^{3x^2}$

b) $\left(e^{3x^2}\right)' = 6x \times e^{3x^2}$ **OK**

c) $\left(e^{3x^2}\right)' = 6 \times e^{3x^2}$

d) $\left(e^{3x^2}\right)' = 6x \times e^{6x}$

Question 4 : calcul de limite.

a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2+10}{e^x}\right) = +\infty$

b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2+10}{e^x}\right) = 10$ **OK**

c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2+10}{e^x}\right) = -\infty$

d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2+10}{e^x}\right) = 0$

Exercice BONUS : Application du TVI.

Soit la fonction $f(x) = x^3 + 3x - 5$**. Montrer que l'équation** $f(x) = 0$ **admet au moins une solution sur l'intervalle** $I = [0;2]$**.**

$f(x)$ est continue sur l'intervalle I.
$f(0) = -5$ et $f(2) = 8 + 6 - 5 = 9$. Comme $f(0) < 0$ et $f(2) > 0$, on en déduit qu'il existe x tel que $f(x) = 0$.