Continuité des fonctions à une variable.

1 Définitions de la continuité

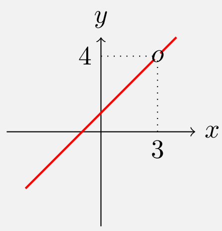
1. Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I \in \mathbb{R}$. Soit $a \in I$, la fonction f est **continue en** a quand...

   ...condition 1 : f est définie en a c'est-à-dire que $f(a)$ existe ;

   ...condition 2 : la limite de f quand $x \to a$ existe c'est-à-dire que les limites à droite et à gauche existent ;

   ...condition 3 : la limite de f quand $x \to a$ est égale à la valeur de f en a c'est-à-dire $f(a)$: $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Exemple 1 : Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ d'où $D_f =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$.



La fonction f n'est pas continue en 3 car elle n'est pas définie en 3 c'est-à-dire qu'il est impossible de calculer $f(3)$ parce que la condition 1 n'est pas respectée.

Est-ce qu'il existe une limite finie en $x = 3$ bien que la fonction ne soit pas définie en $x = 3$?
$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{0}{0}$ donc $x = 3$ est une racine du dénominateur et du numérateur. Pour trouver la seconde racine du numérateur, qui est un polynôme du second degré, on se remémore le S1 et on trouve $x = -1$. On factorise le polynôme d'où $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. La fonction peut se réécrire : $f(x) = \dfrac{(x + 1)(x - 3)}{x - 3} = x + 1$. Donc, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$.

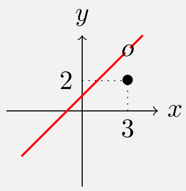
On s'aperçoit que $f(x) = x + 1$ quand $x \neq 3$ et $f(x) \sim_3 (x + 1)$ c'est-à-dire que $f(x)$ est équivalent à $x + 1$ quand x se rapproche de 3.

Exemple 2 : Soit $h(x)$ définie par $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & si\ x \neq 3 \\ h(x) = 4 & si\ x = 3 \end{cases}$

En $x = 3$, cette fonction respecte les trois conditions requises pour être continue. $h(3) = 4$ donc elle est définie en $x = 3$ (condition 1). De plus, $\lim_{x\to 3} h(x) = h(3) = 4$ (conditions 2 et 3).

Dans ce cas, on dit que la fonction est continue en $x = 3$ par prolongement de continuité.

Exemple 3 : Soit $g(x)$ définie par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & si\ x \neq 3 \\ g(x) = 2 & si\ x = 3 \end{cases}$



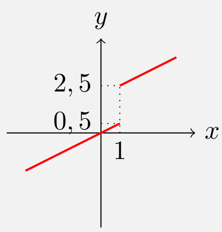
On sait que $g(3) = 2$ donc la fonction g est définie en 3. La condition 1 est respectée. De plus, $\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+1) = 4$. La limite en $x = 3$ existe. La condition 2 est respectée. Mais $\lim_{x\to 3} g(x) \neq g(3)$. La condition 3 n'est pas respectée donc la fonction n'est pas continue en $x = 3$.

Définition 2a	Définition 2b	Définition 2c
Une fonction est **continue** **à droite en** $x = a$ si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$	Une fonction est **continue** **à gauche en** $x = a$ si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$	si f est **continue** **à droite et à gauche** en $x = a$ alors f est continue en $x = a$.

Exemple 4 : Soit la fonction f,

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = 0,5x & si\ x \leq 1 \\ f(x) = 0,5x + 2 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue en $x = 1$. En effet, elle est définie en $x = 1$: $f(1) = 0,5$ mais les limites à droite et à gauche de $x = 1$ sont différentes : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0,5$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2,5$. Donc, la fonction n'est pas continue en $x = 1$.



Définition 3 : La fonction f est **continue sur un intervalle** $I = [a, b]$, si et seulement si, f est continue en tout point de $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Définition 4 : Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en un seul morceau. On ne lève pas la main pour dessiner le graphe de la fonction.

2 Continuité des fonctions usuelles

ENCADRÉ : Continuité des fonctions usuelles.

1. Les fonctions polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions rationnelles, $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ sont continues sur leur domaine de définition.
3. La fonction inverse, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
4. La fonction racine carrée, $f(x) = \sqrt{x}$, est continue sur $[0, +\infty[$.
5. Toute fonction construite par addition, multiplication ou composition de fonctions continues est une fonction continue.

3 Continuité et dérivabilité

Si f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a. Si f est dérivable sur un intervalle I alors la fonction f est continue sur I. Attention, la réciproque est fausse c'est-à-dire qu'une fonction continue en a ou sur un intervalle I n'est pas toujours dérivable en a ou en J.

Exemple 5 : Soit $f(x) = \begin{cases} 4x+2 & si\ x \geq 0 \\ 2 & si\ x < 0 \end{cases}$ *en* $x = 0$

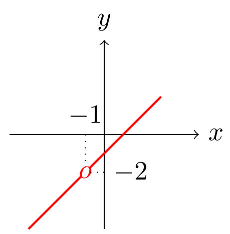
La fonction est continue en $x = 0$ parce qu'elle respecte les 3 conditions (chapitre 7) : $f(0) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. Mais cette fonction n'est pas dérivable en $x = 0$. En effet, $f'_+(0) = 4$ et $f'_-(0) = 0$.

4 Exercices corrigés

Exercice 1 : Les fonctions suivantes sont-elles continues au point considéré ?

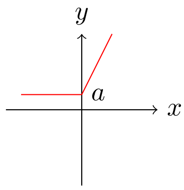
1) $f(x) = 4x^2 - 3x - 100$ en $x = 10$.
La fonction est définie en $x = 10$ donc $\lim\limits_{x \to 10} f(x) = 270 = f(10)$. On en déduit que la fonction est continue en $x = 10$. Elle est continue sur son domaine de définition cad $\mathbb{R}$.

2) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ en $x = -1$.
La fonction n'est pas définie en $x = -1$ donc elle ne sera pas continue en ce point (condition 1 non respectée, cf. cours). Il faudra lever la main pour la représenter graphiquement. Cependant, la fonction est continue sur son domaine de définition.
On remarque que $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$. D'où $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -2$.
Mais la fonction n'est toujours pas continue en $x = -1$.



3) $f(x) = \begin{cases} 2x + a & si\ x \geq 0 \\ a & si\ x < 0 \end{cases}$ *en* $x = 0$ *avec* $a \in \mathbb{R}$

La fonction est définie en $x = 0$: $f(0) = a$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = a$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = a$ donc la fonction est continue en $x = 0$.



Exercice 2 : Soit $f(x) = \sqrt{ax+b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^*$. Calculer la fonction dérivée et comparer le domaine de définition de $f(\cdot)$ et $f^{'}(\cdot)$.

$f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ et $D_{f'} = \left]\dfrac{-b}{a}; +\infty\right[$ alors que $D_f = \left[\dfrac{-b}{a}; +\infty\right[$. Les fonctions dérivées n'ont pas automatiquement le même domaine de définition que la fonction dont elle dérive.

Exercice 3 : Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$ est dérivable en $x = 2$ et non dérivable en $x = -1$.

La fonction est dérivable en x_0 si sa dérivée à droite est égale à sa dérivée à gauche :
$\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{3 + \Delta x} - \sqrt{3}}{\Delta x} = \dfrac{0}{0}$ forme indéterminée. On utilise les quantités conjuguées.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{3 + \Delta x} - \sqrt{3}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{3 + \Delta x} + \sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Et, $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{3 + \Delta x} - \sqrt{3}}{\Delta x} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ donc la fonction est dérivable en $x = 2$.

On peut vérifier que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ soit $f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ n'existe pas. Donc, la fonction n'est pas dérivable en $x = -1$. Elle admet une tangente verticale en $x = -1$.

On peut vérifier que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ soit $f'(-1) = \dfrac{1}{2\sqrt{0}} = \dfrac{1}{0}$!