Fonctions élémentaires réelles à une variable réelle

Table des matières

1 Fonction constante

Définition et domaine de définition

La fonction constante est la fonction qui à tout réel x, associe le réel c : $f(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ est définie et est continue sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

Sens de variation

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c - c}{\Delta x} = 0.$
$f'(x) = 0$. La dérivée d'une constante est nulle. Comme son nom l'indique, la fonction constante est constante !

Concavité/convexité

$f''(x) = 0$. La fonction est à la fois concave et convexe sur son domaine de définition.

Propriétés

- c est le seul réel admettant des antécédents par la fonction constante.
- Tous les points $(x; f(x))$ sont extremum.
- Si $f(x) = 0$ alors la représentation graphique se confond avec l'axe des abscisses. On en déduit que l'équation de l'axe des abscisses est $y = 0$.
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = c$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ avec $a \in \mathbb{R}$.

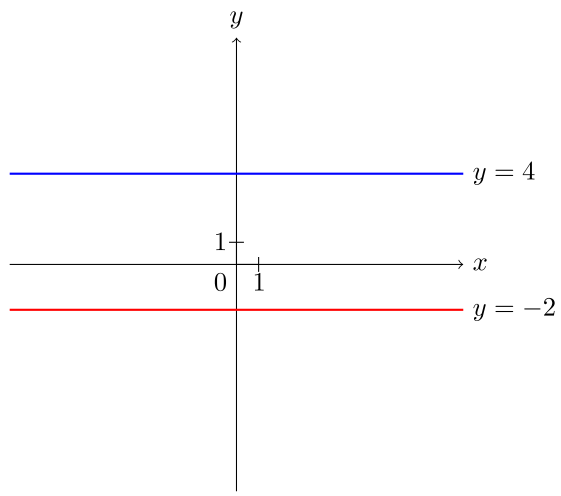

FIGURE 1 – $f(x) = c$

2 Fonction linéaire

Définition et domaine de définition

La fonction linéaire est la fonction qui à tout réel x associe le réel $a \times x$: $f(x) = a \times x$ où $a \in \mathbb{R}^*$.
$f(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$: $D_f = \mathbb{R}$.
Si $a = 0$, alors on retrouve le cas de la fonction constante avec $f(x) = 0$.

Sens de variation

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a(x + \Delta x) - ax}{\Delta x} = a.$
$f'(x) = a$ donc la fonction linéaire est monotone c'est-à-dire...

...strictement croissante si a est positif ;

...strictement décroissante si a est négatif ;

...constante si $a = 0$.

Concavité/convexité

$f''(x) = 0$. La fonction est à la fois concave et convexe sur son domaine de définition.

Propriétés

- Les fonctions linéaires sont monotones (strictement croissant ou décroissante) donc elles n'admettent pas d'extremum sur $\mathbb{R}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^*$, le graphe de f passe par l'origine.
- Chaque antécédent n'a qu'une image et chaque image n'a qu'un antécédent.
- a est le coefficient directeur ou la pente de la droite.
- $y = x$ est appelée première bissectrice.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 0 \\ -\infty & \text{si } a > 0 \end{cases}$

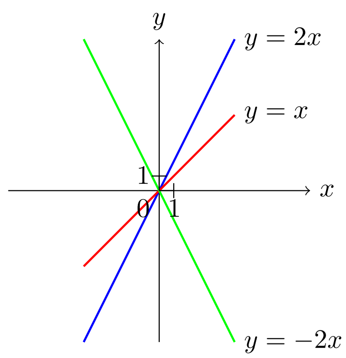

FIGURE 2 – $f(x) = a \times x$

3 Fonction affine

Définition et domaine de définition

La fonction affine associe à tout réel x, le réel $a \times x + b$: $f\left(x\right) = a \times x + b$, où a *et* $b \in \mathbb{R}$. La fonction affine est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, alors la fonction est constante avec $f\left(x\right) = b$.
Si $b = 0$, alors la fonction est linéaire avec $f\left(x\right) = ax$.

Sens de variation

$f^{'}\left(x\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a(x+\Delta x) + b - ax - b}{\Delta x} = a.$
$f^{'}\left(x\right) = a$ donc la fonction affine est monotone c'est-à-dire...

...strictement croissante si a est positif ;

...et strictement décroissante si a est négatif.

Concavité/convexité

$f''\left(x\right) = 0$. La fonction est à la fois concave et convexe sur son domaine de définition.

Propriétés

- Chaque antécédent n'a qu'une image et chaque image n'a qu'un antécédent.
- Les fonctions affines sont monotones (strictement croissant ou décroissante) donc elles n'admettent pas d'extremum sur $\mathbb{R}$.
- a est le coefficient directeur ou la pente de la droite.
- b est l'ordonnée à l'origine : $f\left(0\right) = a \times 0 + b = b$.
- La solution de l'équation $f(x) = 0$ est $x = \dfrac{-b}{a}$. C'est l'abscisse à l'origine.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 0 \\ -\infty & \text{si } a > 0 \end{cases}$

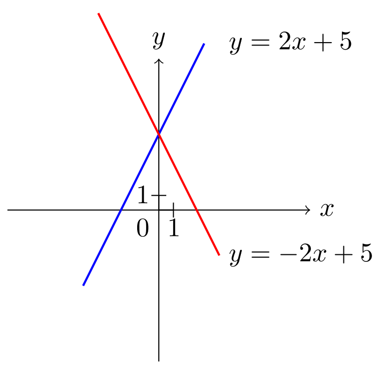

FIGURE 3 – $f(x) = ax + b$

4 Fonction carrée

Définition et domaine de définition

La fonction carrée est la fonction qui à tout réel x, associe le réel noté $f(x) = x^2$, soit x multiplié par lui-même. Il est toujours possible de calculer le carré d'un réel donc la fonction est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R}$.

Sens de variation

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x$.
$f'(x) = 2 \times x$. La fonction carrée est...

...strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$;

...et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Concavité/convexité

$f''(x) = 2 > 0$, $\forall x \in D_f$ donc la fonction est convexe sur son domaine de définition.

Propriétés

- La fonction carrée est une fonction positive : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$.
- Tout nombre réel strictement positif admet deux antécédents par cette fonction : $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.
- Un nombre strictement négatif n'admet pas d'antécédent par cette fonction.
- La fonction carrée admet un seul extremum : $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. C'est un minimum global car $f''(0) = 2 > 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

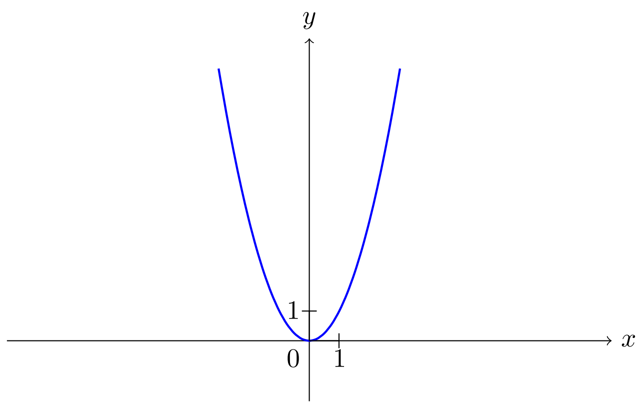

FIGURE 4 – $f(x) = x^2$

5 Fonction racine carrée

Définition et domaine de définition

La fonction racine carrée, notée $f(x) = \sqrt{x}$ ou $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, associe à tout réel x positif, le nombre dont le carré vaut x. Son domaine de définition est $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. Elle est continue sur son domaine de définition.

Sens de variation

$f'(x) = \dfrac{1}{2 \times x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Attention, $f'(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_*^+ \neq D_f$.
La fonction racine carrée est strictement croissante sur son domaine de définition.

Concavité/convexité

$f''(x) = \dfrac{-1}{4 \times x^{\frac{-3}{2}}} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$ donc la fonction est concave sur son domaine de définition.

Propriétés

- La fonction racine carrée est positive $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- Tout nombre réel strictement positif admet un unique antécédent par f : son carré.
- $\sqrt{1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- La fonction n'est pas dérivable en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$

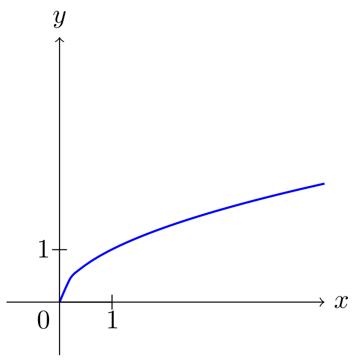

FIGURE 5 – $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

6 Fonction cube

Définition et domaine de définition

La fonction cube est la fonction définie par la relation : $f(x) = x^3$. Il est toujours possible de calculer le cube d'un réel donc $f(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Sens de variation

$f'(x) = 3 \times x^2$
La fonction est strictement croissante sur son domaine de définition.

Concavité/convexité

$f''(x) = 2x$ donc la fonction est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$.

Propriétés

- La fonction est strictement croissante donc elle n'admet pas d'extremum. En $x = 0$, $f'(0) = 0$. La tangente en ce point se confond avec l'ax des abscisses et traverse la courbe.
- $f''(0) = 0$. L'origine est un point d'inflexion.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

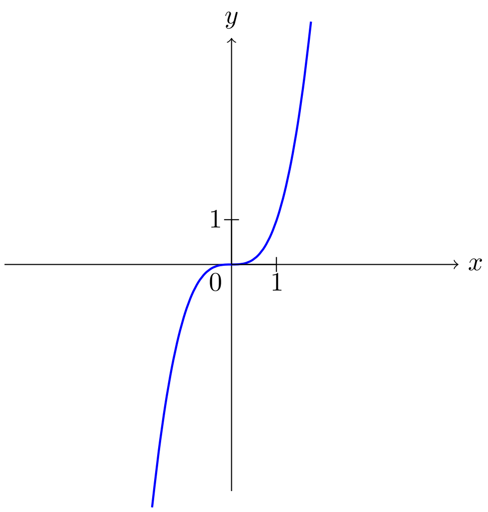

FIGURE 6 – $f(x) = x^3$

7 Fonction racine cubique

Définition et domaine de définition

La fonction racine cubique, notée $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, associe à tout réel x, le nombre dont le cube vaut x. $f(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Sens de variation

$f'(x) = \frac{1}{3} \times x^{\frac{-2}{3}} > 0$, $\forall x \in D_f$. La fonction racine cubique est strictement croissante sur son domaine de définition.

Concavité/convexité

$f''(x) = \frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}}$.
$f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_-$ donc convexe sur $\mathbb{R}_-$
$f''(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ donc concave sur $\mathbb{R}_+$

Propriétés

- La fonction est strictement croissante donc elle n'admet pas d'extremum. En $x = 0$, $f'(0) = 0$. La tangente en ce point se confond avec l'ax des abscisses et traverse la courbe.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

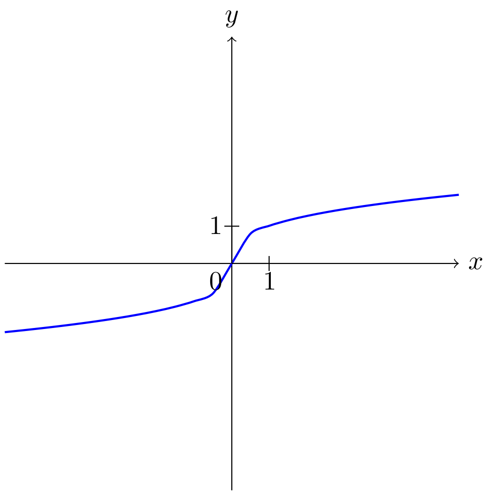

FIGURE 7 – $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

8 Fonction polynomiale du second degré

Définition et domaine de définition

La fonction polynômiale de degré deux est définie par : $f(x) = a \times x^2 + b \times x + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, alors la fonction est affine.
Si $a = 0$ et $b = 0$, alors la fonction est constante.

Sens de variation

$f'(x) = 2 \times a \times x + b$

Si $a > 0$ alors $f(x)$ est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$: La parabole est tournée vers le haut.

Si $a < 0$ alors $f(x)$ est croissante sur $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$: La parabole est tournée vers le bas.

Concavité/convexité

$f''(x) = 2a$.

Si $a > 0$ alors $f(x)$ est convexe sur son domaine de définition.

Si $a < 0$ alors $f(x)$ est concave sur son domaine de définition.

Propriétés

- La fonction admet la droite $x = \frac{-b}{2a}$ comme axe de symétrie.
- L'équation $f(x) = 0$ admet...

  ...2 solutions si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

  ...1 solution si $\Delta = 0$: $x' = \frac{-b}{2a}$

  ...0 solution si $\Delta < 0$.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a \times x^2 = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a \times x^2 = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$

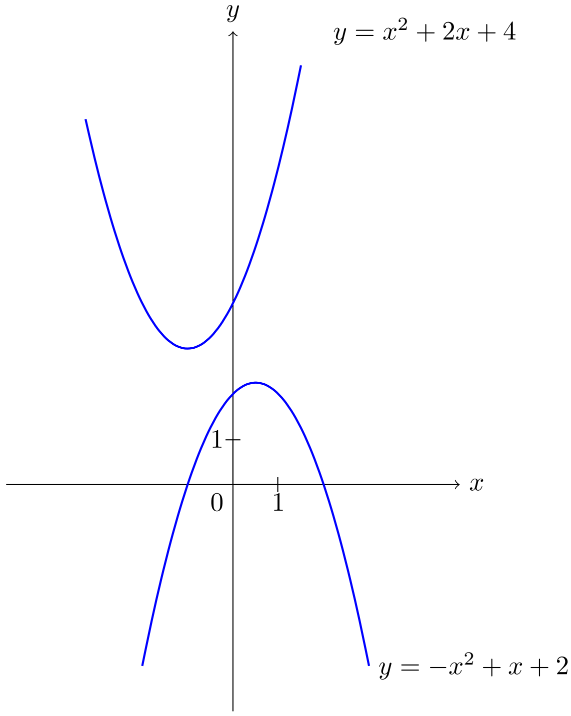

FIGURE 8 – $f(x) = ax^2 + bx + c$

9 Fonction inverse

Définition et domaine de définition

La fonction inverse est la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. Elle est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

Sens de variation

$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0, \forall x \in D_f$.
La fonction inverse est strictement décroissante sur son domaine de définition.

Concavité/convexité

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$: La fonction inverse est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$.

Propriétés

- La fonction inverse n'admet, ni zéro, ni maximum, ni minimum.
- La droite $x = 0$ est asymptote verticale car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
- La droite $y = 0$ est asymptote horizontale car $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0^-$
- La fonction inverse est symétrique par rapport à elle-même, sa réciproque est donc elle même.

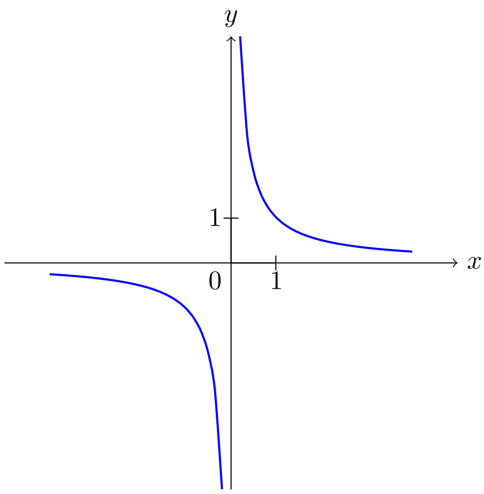

Figure 9 – $f(x) = \frac{1}{x}$

10 Fonction exponentielle de base e

Définition

- Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée $f(x) = e^x$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ alors $e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot e ... e}_{n\ fois}$ et $e^{-n} = \underbrace{\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e} \cdot ... \frac{1}{e}}_{n\ fois}$.
- Si x est un réel alors la seule écriture possible de l'exponentielle de x en base e est e^x.

Sens de variation

$f^{'}(x) = e^x > 0$. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Concavité/convexité

$f''(x) = e^x > 0$. La fonction exponentielle est convexe sur son domaine de définition.

Propriétés

- Conséquences de la stricte croissante de la fonction exponentielle, $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

  1. $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.
  2. $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.
  3. $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$.

- $e^0 = 1$ et $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828$.
- $e^a \times e^b = e^{a+b}$; $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$; $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$; $(e^a)^b = e^{a \cdot b}$;
- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$.
- $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$ et $x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote en $-\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x \times e^x = 0$.

Représentation graphique

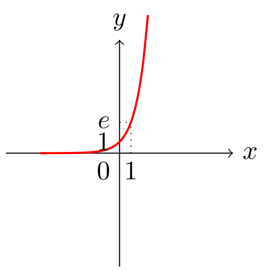

FIGURE 10 – $f(x) = e^x$

Approximation affine de la fonction exponentielle

• Si f est dérivable en x_0, l'approximation affine de $f(x_0+h)$ est $f(x_0)+h\times f'(x_0)$. Sur un petit intervalle, on peut approcher la courbe représentative de f par un petit segment de droite.

$f(x_0+h)=e^{x_0+h}$ et $f(x_0)+h\times f'(x_0)=e^{x_0}+h\times(e^{x_0})'=e^{x_0}+h\times e^{x_0}=e^{x_0}(1+h)$

• L'approximation affine de e^x en 0 est $e^{0+h}=e^0(1+h)=1+h$ donc $e^x\sim_0 1+x$.
On retrouve l'équation de la tangente en $x=0$: $y=f'(0)(x-0)+f(0)=e^0(x-0)+e^0=x+1$

La fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien.

• Application du théorème des valeurs intermédiaires (TVI).
$f(x)=e^x$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$. D'après le TVI, l'ensemble des images est égal à $]0,+\infty[$ et $\forall k\in\,]0,+\infty[$, l'équation $e^x=k$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. Cette unique solution est appelée logarithme népérien de k et est notée $\ln k$: $e^x=k\Leftrightarrow x=\ln k$.

Par conséquent : $e^{\ln x}=x$, $\forall x\in\mathbb{R}_*^+$ et $\ln e^x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

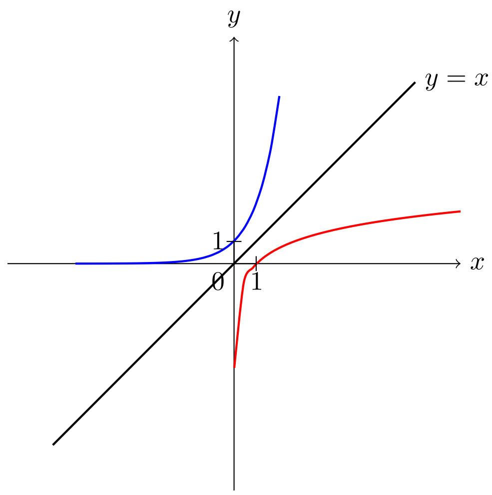

FIGURE 11 – Symétrie $f(x)=e^x$ et $g(x)=\ln x$

La courbe représentative de la fonction $f(x)=e^x$ est symétrique à la courbe représentative de la fonction $g(x)=\ln x$ par rapport à la droite $y=x$. Ainsi, pour passer de ln à e^x, il suffit simplement d'intervertir abscisse et ordonnée.

11 Fonction exponentielle de base a

Définition

La fonction exponentielle de base a, notée $f(x) = a^x$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x) = e^{x \times \ln a}$ où $a \in N^*$, $a > 0$ et $a \neq 1$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sens de variation

$f'(x) = \ln a \times e^{x \times \ln a} = \ln a \times a^x$.
$a^x > 0, \forall x$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $\ln a$.

Si $0 < a < 1$, alors $f(x)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;

Si $a = 1$, alors $f(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$;

Si $a > 1$, alors $f(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Concavité/convexité

$f''(x) = (\ln a)^2 \times e^{x \times \ln a} = 2 \times \ln a \times a^x > O$. Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Propriétés

- $f(x) = a^x$ est positive sur $\mathbb{R}$.
- $f(x) = a^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Si $0 < a < 1$ alors $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ donc la droite $y = 0$ est asymptote horizontale au graphe.
- Si $a > 1$, alors $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0^+$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc la droite $y = 0$ est asymptote horizontale au graphe.

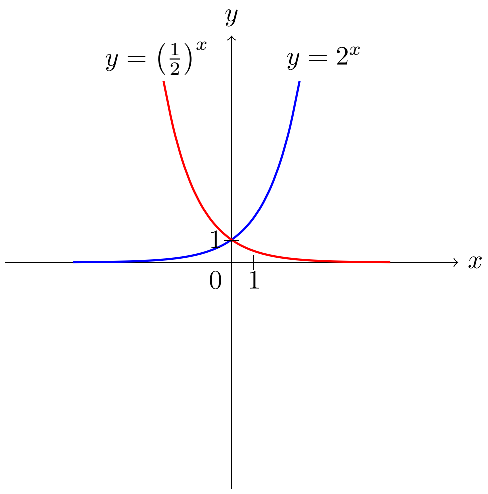

Figure 12 – $f(x) = a^x$

12 Fonction logarithme népérien

Définition

La fonction logarithme népérien, notée $f(x) = \ln x$, est la fonction réciproque de la fonction $f(x) = e^x$. Elle est définie sur $]0, +\infty[$. Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.

Sens de variation

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur son domaine de définition.

Concavité/convexité

$f''(x) = \dfrac{-1}{x^2}$. La fonction logarithme népérien est concave sur son domaine de définition.

Propriétés

- Par conséquence de sa croissance stricte, $\forall x, y \in]0, +\infty[$ si $x < y$ alors $\ln x < \ln y$; si $x = y$ alors $\ln x = \ln y$.
- $\ln 1 = 0$.
- La fonction $\ln x$ est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.
- La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale : $\lim\limits_{x \to 0} ln\ x = -\infty$.
- $\ln x \times y = \ln x + \ln y$; $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$; $\ln x^n = n \ln x$ avec $n \in \mathbb{R}$; $\ln \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \ln x$ avec $n \in \mathbb{R}^*$

Fonction logarithme de base a

La réciproque d'une fonction exponentielle de base a avec $a > 0$ et $a \neq 1$, est la fonction logarithme de base a définie par $f(x) = \log_a x$. Le nombre $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ est la puissance à laquelle il faut élever la base a pour obtenir x. Son domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$, son ensemble image est $\mathbb{R}$. Si $a > 1$, la fonction logarithme est croissante. Elle est décroissante pour $0 < a < 1$.
Changement de base : Pour passer d'une base a quelconque $(a > 0, a \neq 1)$ à la base e, on utilise les deux identités suivantes : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ $a^x = e^{x \ln a}$

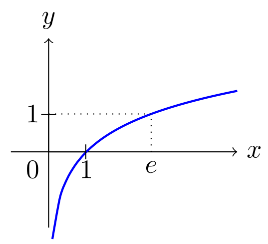

Figure 13 – $f(x) = \ln x$

13 Fonction puissance

La fonction puissance[1] est notée $f(x) = x^n$, son domaine de définition dépend du signe et de la parité de l'exposant.

13.1 Fonction puissance avec exposant entier pair

Définition
$f(x) = x^{2\times p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$. Si $p = 0$, on retrouve la fonction constante $f(x) = 1$.

Sens de variation
$f'(x) = 2 \times p \times x^{2p-1}$. Le signe de cette dérivée dépend de la parité de l'exposant : $(2p-1)$ est impair, $\forall p \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $f(x)$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Propriétés

- $f''(x) = 2p \times (2p-1)\, x^{2p-2}$. Avec, $2 \times p\,(2p-1) > 0$ et $2p-2$ est pair donc $x^{2p-2} > 0$, $\forall x$. La fonction est convexe sur $\mathbb{R}$ (parabole).
- $f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$: $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

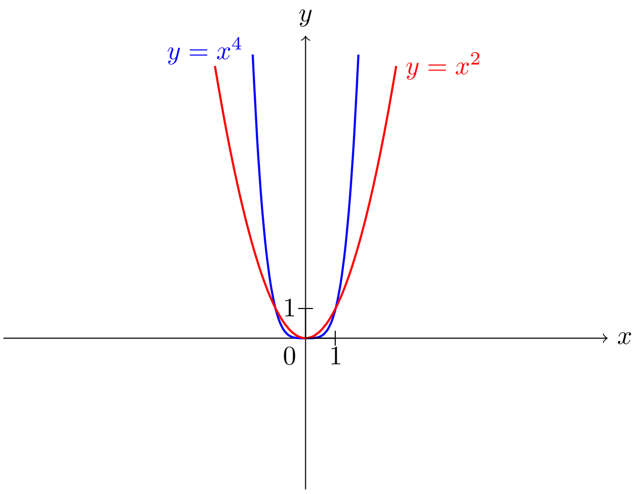

FIGURE 14 – $f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et α pair.

1. Attention à bien distinguer la fonction puissance x^n de la fonction exponentielle a^x.

13.2 Fonction puissance avec exposant entier impair

Définition
$f(x) = x^{2p+1}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$.
Si $p = 0$, on retrouve la fonction linéaire $f(x) = x$.

Sens de variation
$f'(x) = (2p+1) \times x^{2p}$. Comme $(2p)$ est pair alors $f(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés

- $f''(x) = (2p) \times (2p+1)\, x^{2p-1}$. avec $(2p) \times (2p+1) > 0$ et $(2p-1)$ est impair d'où $x^{2p-1} > 0$ quand $x > 0$ et $x^{2p-1} < 0$ quand $x < 0$. Donc la fonction est concave sur $\mathbb{R}^-$ et convexe sur $\mathbb{R}^+$.
- $f(x)$ est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.
- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

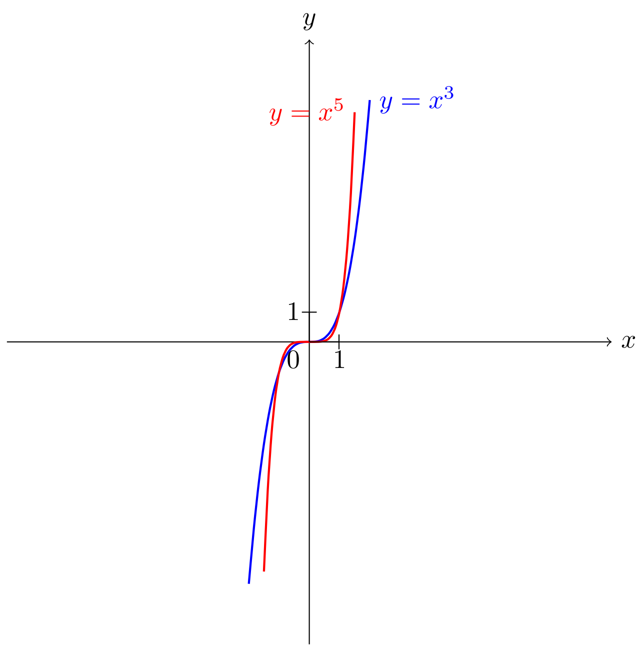

FIGURE 15 – $f(x) = x^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et α impair.

13.3 Fonction puissance avec exposant entier relatif négatif pair

Définition

$f(x) = x^{2\times p}$ où $p \in Z^-$ dont le domaine de définition est : $\mathbb{R}^*$

Sens de variation

$f'(x) = 2p \times x^{2p-1}$. Avec, $2p < 0$, $\forall p \in Z^-$ et $2p-1$ est impair donc $x^{2p-1} < 0$ quand $x < 0$ et $x^{2p-1} > 0$ quand $x > 0$. Donc $f^{'}(x) > 0$ quand $x < 0$ et $f^{'}(x) < 0$ quand $x > 0$.

Propriétés

- $f''(x) = (2p) \times (2p-1)\, x^{2p-2}$. avec $(2p) \times (2p-1) > 0$ et $x^{2p-2} > 0$ car l'exposant est pair. Donc la fonction est convexe sur $\mathbb{R}^*_-$ et sur $\mathbb{R}^*_+$.
- $f(x)$ est positive sur son domaine de définition.
- La droite $y = 0$ est asymptote car $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
- La droite $x = 0$ est asymptote car $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0^+$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0^-$.

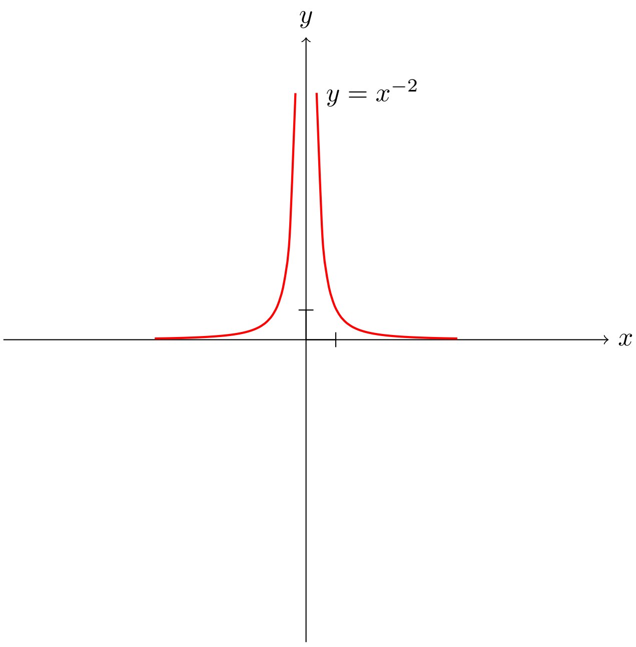

FIGURE 16 – $f(x) = x^{\alpha}$ avec $\alpha \in Z^-$ et α pair.

13.4 Fonction puissance avec exposant entier relatif négatif impair

Définition
$f(x) = x^{2p+1}$ où $p \in Z^-$ dont le domaine de définition est : $\mathbb{R}^*$

Sens de variation : $f'(x) = (2p+1) \times x^{2p}$. Avec $(2p+1) < 0$, $\forall p \in \mathbb{Z}^-$ et $2p$ est pair donc $x^{2p} > 0$, $\forall x$. Donc $f^{'}(x) < 0$ sur son domaine de définition.

Propriétés

- $f''(x) = (2p) \times (2p+1)\, x^{2p-1}$. avec $(2p)(2p+1) > 0$ et $x^{2p-1} > 0$ quand $x > 0$ et $x^{2p-1} < 0$ quand $x < 0$. Donc la fonction est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et concave sur $\mathbb{R}_-^*$.
- $f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et négative sur $\mathbb{R}_-^*$.
- La droite $y = 0$ est asymptote car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
- La droite $x = 0$ est asymptote car $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0^+$.

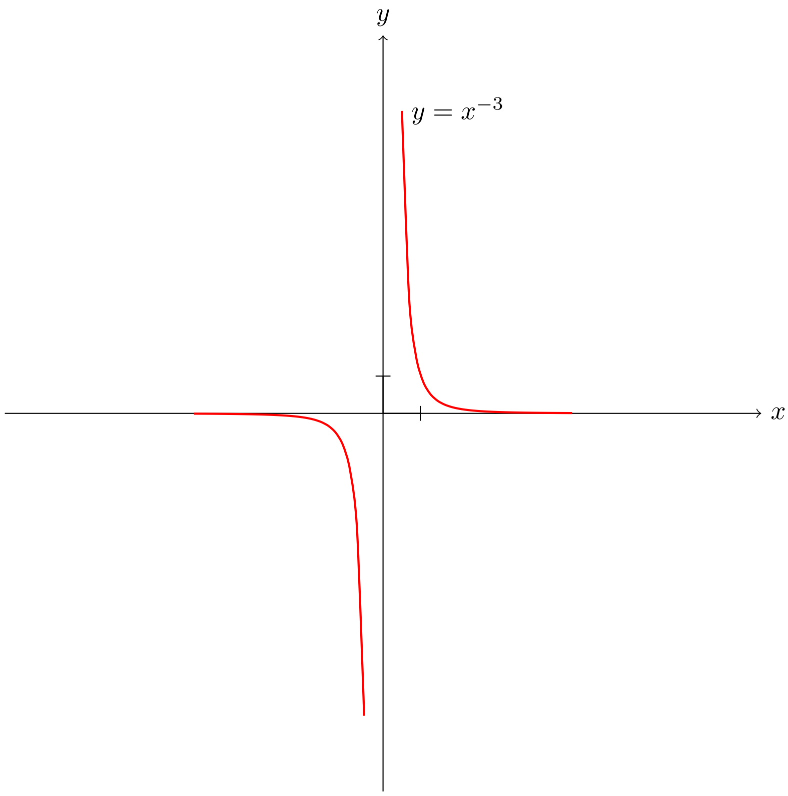

Figure 17 – $f(x) = x^{\alpha}$ avec $\alpha \in Z^-$ et α impair.

13.5 Fonction puissance avec exposant rationnel

$f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}*$. La fonction se réécrit : $f(x) = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{x})^p$.
Il faut distinguer deux cas en fonction de la parité de q.

1. $f(x) = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ avec q pair.
   (a) **Exemple** : $f(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^p = (\sqrt[4]{x})^p$.
   (b) **Domaine de définition** : $\mathbb{R}_+$
   (c) **Sens de variation** : $f'(x) = \dfrac{p}{q} \times x^{\left(\frac{p}{q}-1\right)}$.
   $f'(x) > 0$ si $p > 0$. On rappelle que $q \in \mathbb{N}*$ donc $q > 0$.
   $f'(x) < 0$ si $p < 0$.
   (d) **Concavité/convexité** : $f''(x) = \dfrac{p}{q} \times \left(\dfrac{p}{q} - 1\right) \times x^{\left(\frac{p}{q}-2\right)}$.
   Si $p > 0$ alors $f''(x) > 0$ si $p > q$ et $f''(x) < 0$ si $p < q$.
   Si $p < 0$ alors $f''(x) > 0$ car $p < q$, $\forall q \in \mathbb{N}$.

2. $f(x) = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ avec q impair.
   (a) **Exemple** : $f(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^p = (\sqrt[3]{x})^p$.
   (b) **Domaine de définition** : $\mathbb{R}$
   (c) **Sens de variation** : $f'(x) = \dfrac{p}{q} \times x^{\left(\frac{p}{q}-1\right)}$.
   $f'(x) > 0$ si $p > 0$
   $f'(x) < 0$ si $p < 0$.
   (d) **Concavité/convexité** : $f''(x) = \dfrac{p}{q} \times \left(\dfrac{p}{q} - 1\right) x^{\left(\frac{p}{q}-2\right)}$.
   Si $p > 0$ alors $f''(x) > 0$ si $p > q$ et $f''(x) < 0$ si $p < q$.
   Si $p < 0$ alors $f''(x) > 0$ car $p < q$, $\forall q \in \mathbb{N}$.