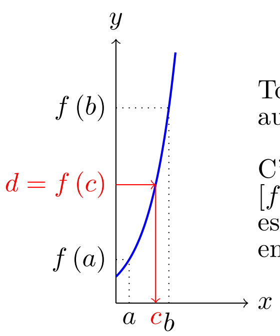
Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

1 Continuité et valeurs intermédiaires

Le TVI, permet de comprendre l'intérêt de la notion de continuité d'une fonction sur un intervalle.

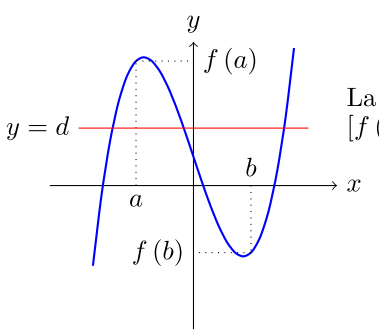
Théorème : Si une fonction $f(x)$ est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ alors, tout point d strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, est l'image d'au moins un point $c \in [a, b]$, c'est-à-dire $f(c) = d$.

Si f prend les valeurs $f(a)$ et $f(b)$, et si elle est continue entre a et b, alors elle prend toutes les "valeurs intermédiaires", comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.



Toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$ admettent au moins un antécédent.

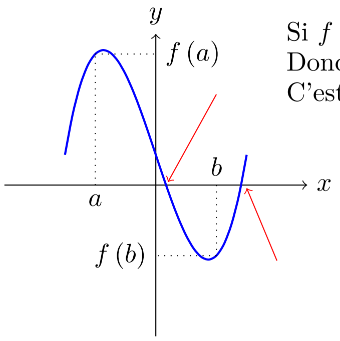
C'est-à-dire qu'une droite horizontale d'équation $y = d$ appartenant à l'intervalle $[f(a), f(b)]$ coupe au moins une fois la courbe de la fonction f si cette dernière est continue sur cet intervalle. Où c est l'abscisse du point d'intersection entre la courbe et la droite d'équation $y = d$.



La droite horizontale d'équation $y = d$ appartenant à l'intervalle $[f(a), f(b)]$ coupe trois fois la courbe de la fonction f.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : Soit une fonction $f(x)$, continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe un réel c compris entre a et b : $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

L'hypothèse $f(a) \times f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.



Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors 0 est une valeur intermédiaire. Donc la courbe de la fonction traverse au moins une fois l'axe des abscisses. C'est-à-dire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Ce corollaire permet d'énoncer que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.
Soit le polynôme $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ avec n impair.
Alors, en supposant que $a_n > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Par conséquent, il existe deux réels a et b tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple 1 : Soit la fonction $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 7$. Montrer qu'il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [-1; 1]$ puis $x \in \mathbb{R}$.

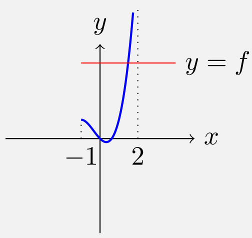
Première étape : On sait que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f est aussi continue sur $[-1; 1]$.
Deuxième étape : Pour $x \in [-1; 1]$. On calcule $f(-1)$ et $f(1)$ d'où $f(-1) = -1$ et $f(1) = 5$. Par conséquent, il existe au moins une valeur de x telle que $f(x) = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$. On étudie les limites aux bornes : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$. Par conséquent, il existe au moins une valeur de x telle que $f(x) = 0$.

Exemple 2 : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x$. Montrons que l'équation $f(x) = 4$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[-1; 2]$.

1. Première étape : On sait que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $[-1; 2]$.
2. Deuxième étape : on calcule $f(-1)$ et $f(2)$. Ainsi, $f(-1) = 1$ et $f(2) = 10$
3. Troisième étape : On sait que f est continue sur $[-1; 2]$. De plus, $4 \in [f(-1); f(2)] = [1; 10]$. Alors, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 4$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[-1; 2]$. A ce stade, nous avons démontré qu'une solution existait mais on ne sait pas quelle est sa valeur.

   On peut aller plus loin et chercher si cette solution est unique.
   Si la fonction est monotone sur l'intervalle $[-1; 2]$ alors cette solution sera unique.
   $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. On calcule les racines : $x' = -1$ et $x'' = \frac{1}{3}$ donc $f'(x) > 0$ quand $x > \frac{1}{3}$. Par conséquent, la fonction est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-5}{27}$ donc $4 \in \left[\frac{-5}{27}; 10\right]$.
   La solution est unique. Ce que l'on peut vérifier graphiquement :

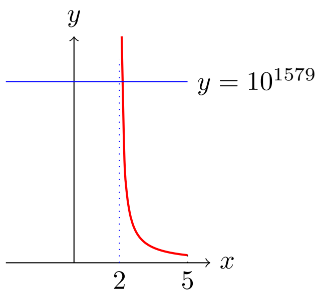


2 Exercices corrigés

Exercice 1 : Soit la fonction f définie sur $]2; 5]$ par $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Montrer que l'équation $f(x) = 10^{1579}$ admet au moins une solution sur $]2; 5]$.

La fonction est une fonction homographique, donc elle est continue sur son domaine de définition où $D_f =]2;5]$.
On calcule les images par $f(\cdot)$ aux bornes du domaine de définition : $f(5) = \dfrac{1}{3}$ mais $f(2)$ n'est pas définie.
On calcule alors $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$. (Vous noterez que la limite quand $x \to 2^-$ n'existe pas.)
Ainsi, $10^{1579} \in \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$ donc l'équation $f(x) = 10^{1579}$ admet au moins une solution dans $]2;5]$ (application du TVI).

Pour faire la représentation graphique ci-dessous, on a besoin de la dérivée : $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0$, $\forall x \in D_f$.



Exercice 2 : Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Est-ce que l'équation $f(x) = 1$ a au moins une solution sur l'intervalle $I = [-2;2]$ puis sur l'intervalle $J = [0,25;2]$?

Sur l'intervalle $I = [-2;2]$, la fonction n'est pas continue. On ne sait pas diviser par 0 donc on ne peut pas appliquer le TVI.

Sur l'intervalle $J = [0,25;2]$, la fonction est continue. On calcule les images aux bornes de l'intervalle : $f(0,25) = 4$ et $f(2) = 0,5$. On a $f(0,25) > 1$ et $f(2) < 1$ alors l'équation $f(x) = 1$ a au moins une solution sur J. On peut déterminer cette solution (qui est unique, cf. séance suivante) : $\dfrac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$.