UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Mathématiques - L1 Économie.

Semestre 2 - Année 2023/2024

COURS

Chapitres 1 et 2

Cours magistraux			
Division	Jour et horaire	Amphi	Enseignant
1	Vendredi 12h30-13h30	Amphi I	S. Jallais
2	Mardi 9h30-10h30	Amphi J	J. Lecointre
3	Mardi 16h00-17h00	Amphi L	J. Lecointre

DE/TD			
Groupes de TD	Jour et horaire	Amphi	Enseignant
TD 1101 / 1102 / 1103 / 1104	Lundi 16h00 -17h30	Amphi H	N. Touré
TD 1105 / 1106 / 1107	Lundi 11h30 - 13h00	Amphi L	N. Canry
TD 1108/ 1109 / 1110 / 1111	Mardi 12h00-13h30	Amphi J	J. Lecointre
TD 1201 / 1202 / 1203	Mercredi 17h30-19h00	Amphi J	O. Joya
TD 1204 / 1205 / 1211	Lundi 15h30-17h00	Amphi K	JF. caulier
TD 1206 / 1208 / 1212	Samedi 11h30 -13h00	Amphi J	V. Calaud
TD 1207 / 1209 / 1210	Mercredi 9h00-10h30	Amphi K	L. Pejsachowicz
TD 1301 / 1303 / 1305	Vendredi 14h00-15h30	Amphi K	S. Jallais
TD 1302 / 1304 / 1306	Mercredi 11h30-13h00	Amphi L	S. Jallais
TD 1307 / 1308 / 1309 / 1310	Mercredi 16h-17h30	Amphi K	O. Joya

Table des matières

Ce que vous devez savoir faire.

A l'issue du chapitre 1, vous devez...

1. ... savoir définir un ensemble en extension et en compréhension dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$;
2. ... définir un ensemble à partir d'une inégalité ;
3. ... connaitre et utiliser le symbole de l'inclusion $\subseteq$ ou $\subset$;
4. ... connaitre et utiliser le symbole de l'intersection $\cap$ ainsi que ses propriétés ;
5. ... connaitre et utiliser le symbole de l'union $\cup$ ainsi que ses propriétés ;

A l'issue du chapitre 2, vous devez...

1. ... savoir déterminer le domaine de définition des fonctions usuelles (polynomiales, rationnelles, puissances, valeur absolue) ;
2. ... savoir déterminer le domaine de définition des fonctions composées ;
3. ... savoir faire des opérations entre les fonctions et déterminer leur domaine de définition.

Chapitre 1

Les ensembles dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$.

1 Définitions et représentation d'un ensemble

Un **ensemble** est une collection d'objets dont on peut identifier les éléments. Par exemple : les étudiants de la L1 d'économie ; les étudiants inscrits à Paris 1 ; les entiers naturels... Comme indiqué précédemment, nous nous intéresserons uniquement aux ensembles définis sur $\mathbb{R}$.

Un ensemble, A, est parfaitement décrit si, $\forall a$, on peut répondre par OUI ou par NON à la question : a est-il élément de l'ensemble A ? Soit a est un élément de A ce que l'on écrit : $a \in A$ qui se lit a appartient à A ; soit a n'est pas un élément de l'ensemble A ce que l'on écrit $a \notin A$ qui se lit a n'appartient pas à A.
Grammaire mathématique : Les symboles $\in$ et $\notin$ s'utilisent entre un élément et un ensemble.

Les ensembles numériques.

1. Les **entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
   Si on additionne ou multiplie deux entiers naturels quelconques, le résultat sera encore un entier naturel (On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est stable pour l'addition et la multiplication). Ce n'est pas le cas pour la soustraction, $3 - 4 = -1$ et $-1 \notin \mathbb{N}$, ni pour la division, $\frac{3}{4} = 0,75 \notin \mathbb{N}$.

2. Les **entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$.
   Si on additionne, soustrait ou multiplie deux entiers relatifs quelconques, le résultat sera encore un entier relatif (L'ensemble $\mathbb{Z}$ est stable pour l'addition, la soustraction et la multiplication).

   Tout entier naturel est un entier relatif : $\mathbb{Z}$ contient donc $\mathbb{N}$. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on le note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. En revanche, tous les entiers relatifs ne sont pas des entiers naturels. Ce que l'on notera $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ (section 2).

3. Les **nombres rationnels**.
   Les nombres rationnels, notés $\mathbb{Q}$, sont les quotients d'un entier relatif par un entier relatif non nul : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$, c'est-à-dire les nombres que l'on peut écrire sous la forme d'une fraction de nombres entiers relatifs.

   Si on additionne, soustrait, multiplie ou divise (sauf par 0) deux nombres rationnels quelconques, le résultat sera encore un nombre rationnel (L'ensemble $\mathbb{Q}$ est stable pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division (sauf par 0)).

   Tout entier relatif est un nombre rationnel. En effet, $7 = \frac{7}{1}$; $-3 = \frac{-3}{1}$; $0 = \frac{0}{a}$ avec $a \in \mathbb{Z}^*$.
4. Les **nombres réels**.
   L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

Le symbole ∞ signifie l'**infini**.
L'infini n'est pas un nombre. C'est un concept mathématique qui illustre le fait que l'on peut toujours trouver un réel supérieur (ou inférieur) à un autre réel. Soit, $x = 10^{10}$, un nombre très grand. Alors, il est possible de trouver un nombre réel qui soit encore plus grand : $y = 10^{10} + 1$ et ainsi de suite. Ce processus n'a pas de fin. Ce calcul peut aussi être répété avec des nombres négatifs. C'est pourquoi on parle de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Entre deux nombres réels, il est existe une infinité de nombres réels. Ainsi, il est possible de relier tous les nombres réels et de former la droite des réels.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est stable pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division sauf par 0.

Parmi les ensembles, on définit un **ensemble vide** noté $\emptyset$.

On peut définir un ensemble soit **en compréhension**, soit **en extension**. Dans le premier cas, on indique, toujours entre accolades, les propriétés communes à tous les éléments de l'ensemble. C'est ce qui est fait pour l'ensemble $\mathbb{Q}$ défini ci-dessus.
Dans le second cas, on peut liste tous les éléments de l'ensemble. C'est ce qui est fait pour les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ci-dessus.

2 Sous-ensemble

Soient A et B deux ensembles. B **est sous-ensemble de** A si tous les éléments de B sont des éléments de A.

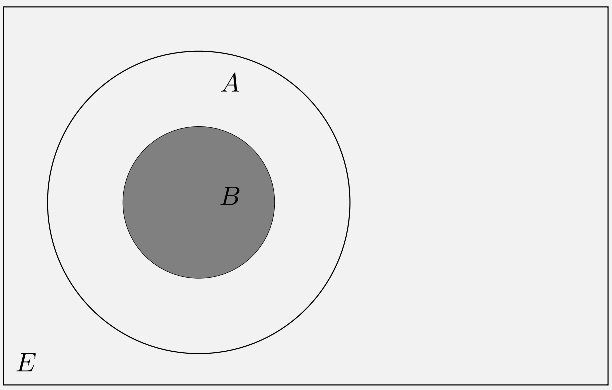
$B \subset A$ se lit soit **"B est inclus dans A"**, soit "B est un sous-ensemble de A".
$B \not\subset A$ se lit "l'ensemble B n'est pas inclus dans l'ensemble A". En d'autres termes, l'ensemble B n'est pas un sous-ensemble de A.
Grammaire mathématique : Les symboles $\subset$ ou $\not\subset$ s'utilisent entre deux ensembles.

Remarque : Retour aux ensembles numériques. Tout nombre rationnel est un nombre réel donc $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mais $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$. En effet, il existe des nombres réels non rationnels comme $\sqrt{2}$. Les réels non rationnels sont appelés irrationnels.

Le fait que tout nombre rationnel est un nombre réel, nous permet d'écrire : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 1 : Soient $A = \{x \in \mathbb{R},\ 0 \leq x \leq 1\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 1\}$ alors $A \not\subset B$ et $B \subset A$. Tous les éléments de B appartiennent aussi à A, mais la réciproque n'est pas vraie. Il existe des éléments de A qui n'appartiennent pas à B. Il s'agit de 0 et de 1.

Exemple 2 : Soit les ensembles $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $B = \{1; 2; 4\}$ donc $B \subset A$.
Remarque : A et $B \in \mathbb{N}$



Comme tous les autres ensembles, on peut écrire les sous-ensembles en compréhension ou en extension.

Comment écrire les ensembles ci-dessous en compréhension ?

Exemple 3 : Soit l'ensemble A composé de tous les nombres réels positifs ou nuls.
On peut écrire l'ensemble A en compréhension de la manière suivante : $A = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$.
Remarque : La virgule se lit "tel que".

Exemple 4 : Soit l'ensemble B composé de tous les nombres réels compris entre -1 et 3 à l'exclusion de -1 et 3. On peut écrire l'ensemble B en compréhension de la manière suivante : $B = \{x \in \mathbb{R},\ -1 < x < 3\}$.

Exemple 5 : Soit l'ensemble C composé de tous les entiers naturels compris entre -1 et 3 à l'exclusion de -1 et 3. On peut écrire l'ensemble C en compréhension de la manière suivante : $C = \{x \in \mathbb{N},\ -1 < x < 3\}$.

Comment écrire les ensembles ci-dessous en extension ?

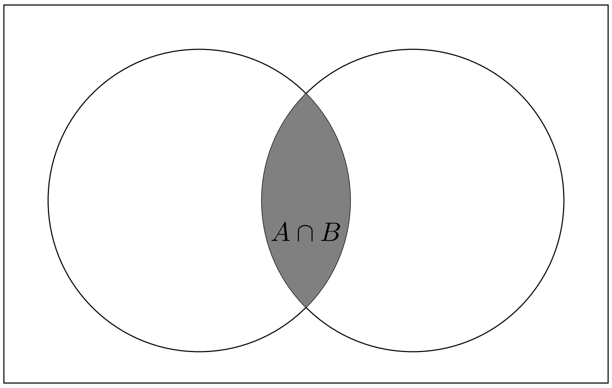
Exemple 6 : Soit $A = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$. On peut réécrire cet ensemble de la manière suivante : $A = [0; +\infty[$. La borne de l'intervalle est fermée pour 0 car l'inégalité est au sens large : $x \geq 0 \Rightarrow 0 \in A$. Avec le symbole ∞, les bornes des intervalles sont toujours ouvertes.

Exemple 7 : Soit $B = \{x \in \mathbb{R},\ -1 < x < 3\}$. On peut réécrire cet ensemble de la manière suivante : $B =]-1; 3[$. Les deux bornes de l'intervalle sont ouvertes car la double inégalité est au sens strict : $-1 < x < 3 \Rightarrow -1 \notin B$ et $3 \notin B$.

Exemple 8 : Soit $C = \{x \in \mathbb{N},\ -1 < x < 3\}$. On peut réécrire cet ensemble de la manière suivante : $C = \{0; 1; 2\}$. Impossible d'utiliser des crochets lorsque l'on est dans $\mathbb{N}$ car c'est un ensemble "discontinu".

3 Intersection et Union d'ensembles

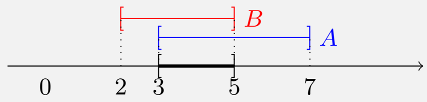
L'**intersection** des ensembles A et B est l'ensemble noté $A \cap B$. Ainsi, $\boldsymbol{a \in A \cap B}$ se lit a appartient à l'ensemble $A \cap B$. Dans ce cas, $\boldsymbol{a \in A}$ **ET** $\boldsymbol{a \in B}$. Donc les éléments de $A \cap B$ appartiennent nécessairement aux deux ensembles.



Propriétés de l'intersection des ensembles.
1) $A \cap B = \{a \in \mathbb{R}\ :\ a \in A \textbf{ et } a \in B\}$ 2) $A \cap B = B \cap A$
3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. 4) $A \cap A = A$
5) $A \cap \emptyset = \emptyset$

Remarque : Si $A \cap B = \emptyset$ alors les ensembles A et B sont disjoints c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun élément en commun.

Exemple 9 : Soient $A = [3;7]$ et $B = [2;5]$ alors $A \cap B = [3;5]$.
Pour comprendre l'intersection, vous pouvez représenter les ensembles sur la droite des réels :



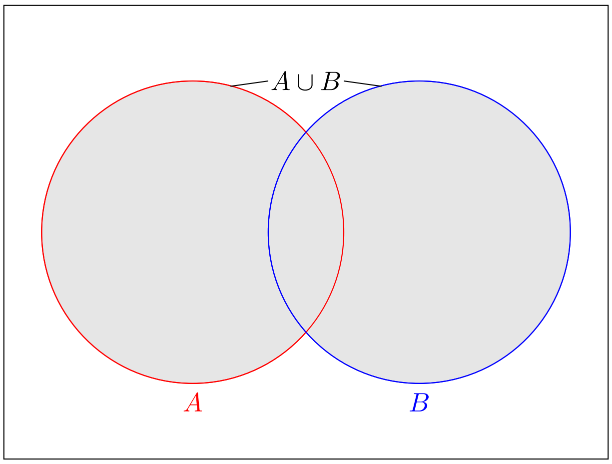
Exemple 10 : Soient $A =]3;7[$ et $B =]2;5[$ alors $A \cap B =]3;5[$.

Exemple 11 : Soient $A = [3;7[$ et $B =]2;5[$ alors $A \cap B = [3;5[$.

Exemple 12 : Soient $A = [2;+\infty[$ et $B =]-\infty;1[$ alors $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 13 : Soit les ensembles $A = \{1;2;3;4;5\}$ et $B = \{2;4;6;7\}$
$A \cap B = \{2;4\}$

L'**union** de deux ensembles A et B est l'ensemble noté $A \cup B$. Ainsi, $\boldsymbol{a \in A \cup B}$ se lit a appartient à l'ensemble $A \cup B$. Dans ce cas, $\boldsymbol{a \in A}$ **OU** $\boldsymbol{a \in B}$ **OU** $\boldsymbol{a \in (A \cap B)}$. Donc les éléments de l'ensemble $A \cup B$ appartiennent soit à A, soit à B, soit à A et à B.



Propriétés de l'union des ensembles.

1) $A \cup B = \{a \in \mathbb{R}\ \ a \in A$ **ou** $a \in B\}$
2) $A \cup B = B \cup A$
3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4) $A \cup A = A$
5) $A \cup \emptyset = A$

Exemple 14 : Soient $A = [0;+\infty[$ et $B =]-10;+\infty[$ alors $A \cup B =]-10;+\infty[= B$.

Exemple 15 : Soient $A =]5;10]$ et $B = [0;4]$ alors $A \cup B = [0;4] \cup]5;10]$.

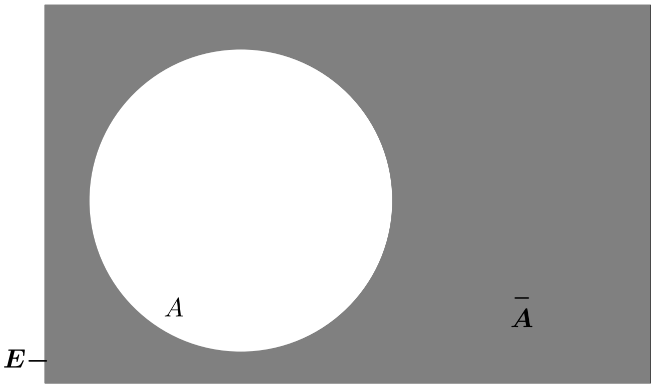
Exemple 16 : Soient $A =]5;10]$ et $B = [5;7]$ alors $A \cup B = [5;10]$.

Exemple 17 : Soit les ensembles $A = \{1;2;3;4;5\}$ et $B = \{2;4;6;7\}$
$A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;7\}$

4 Complémentaire d'un ensemble dans E

L'ensemble **complémentaire de** A dans $\mathbb{E}$ (ou complémentaire de A) est l'ensemble : $A^c = \overline{A} = \{a \in \mathbb{E},\ a \notin A\}$.
On peut aussi l'écrire $\overline{A} = \mathbb{E} \setminus A$, qui se lit "$\mathbb{E}$ privé des éléments de A".

Remarque : Un ensemble complémentaire se comprend toujours par rapport à un ensemble de référence qui est ici $\mathbb{E}$.



Exemple 18 : Soit $A = [0; +\infty[$ alors, le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$ est $\overline{A} =]-\infty; 0[$ et réciproquement.

Exemple 19 : Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 10\}$ alors son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 10\}$.

Exemple 20 : Soit $A =]5; 10] \cup [12; 14]$ alors son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est $\overline{A} =]-\infty; 5] \cup]10; 12[\cup]14; +\infty[$

Exemple 21 : Soit l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Le complémentaire de $A = \{2; 4\}$ dans E est :
$\overline{A} = \{1; 3; 5\}$

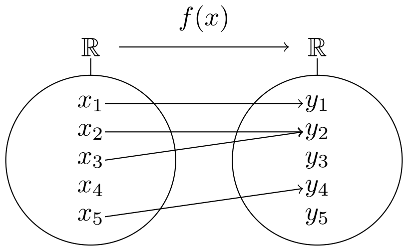
Chapitre 2

Les fonctions usuelles et composées et leurs domaines de définition

1 Introduction

1.1 Qu'est-ce qu'une fonction réelle d'une variable réelle ?

C'est une **fonction** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (ou une **application**) Elle associe à certains réels x au plus un réel $y = f(x)$.



1. $f(\cdot)$ est une règle de calcul appliquée aux éléments x de $\mathbb{R}$.
2. Dans cette représentation graphique de la fonction $f(x)$, on s'aperçoit que tous les éléments de l'**ensemble de départ** ne sont pas associés à un élément de l'**ensemble d'arrivée**. C'est le cas de l'élément x_4. C'est pourquoi on définit à l'intérieur de l'ensemble de départ un sous-ensemble que l'on nomme **domaine de définition** - noté D_f - qui est constitué de l'ensemble des valeurs pour lesquelles il sera possible d'évaluer (calculer) $f(x)$. Les éléments du domaine de définition s'appellent les **antécédents** alors que les nombres $f(x)$ s'appellent les **images**.
3. L'ensemble des images d'une fonction ne se confond pas nécessairement avec $\mathbb{R}$.
4. Les couples $(x, f(x))$ sont issus du **produit cartésien** entre le domaine de définition et l'ensemble d'arrivée (cf. Fiche EPI).
5. Ainsi, pour définir une fonction, on spécifie son ensemble de départ ($\mathbb{R}$), son ensemble d'arrivée ($\mathbb{R}$) et la règle qui associe à un antécédent une image comme ci-dessous :

$$\begin{array}{cccc} \text{f :} & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Par la suite, on acceptera de définir une fonction en écrivant plus simplement : "soit la fonction $f(x) = \ldots$". Cette écriture manque de rigueur mais cela permet d'aller plus vite !

1.2 Les fonctions usuelles étudiées ce semestre :

1. **Fonction polynomiale** : $f(x) = a_n \times x^n + a_{n-1} \times x^{n-1} + ... + a_1 \times x + a_0$ où a_i sont les coefficients et $a_i \times x^j$ les monômes de degré j. Parmi les fonctions polynomiales, on retrouve : les fonctions **linéaire**, $f(x) = a \times x$, **affine** $f(x) = a \times x + b$ avec $a \neq 0$, et **quadratique** $f(x) = a \times x^2 + b \times x + c$ (Étudiées au S1).

2. **Fonction rationnelle** : $f(x) = \dfrac{a_n \times x^n + a_{n-1} \times x^{n-1} + ... + a_1 \times x + a_0}{b_n \times x^n + b_{n-1} \times x^{n-1} + ... + b_1 \times x + b_0}$ dont la **fonction inverse** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et les **fonctions homographiques** $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec c et $d \neq 0$.

3. **Fonctions puissances**...
   (a) ...entière positive : $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ dont la fonction carrée, $f(x) = x^2$, et la fonction cube, $f(x) = x^3$.
   (b) ...entière négative : $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ ou $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*_-$.
   (c) ...rationnelles : $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ dont la fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

4. **Fonctions valeurs absolues** : $f(x) = |x|$ ou $f(x) = |u(x)|$.

2 Fonction polynomiale $f(x) = a_n \times x^n + a_{n-1} \times x^{n-1} + ... + a_1 \times x + a_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Quel que soit le nombre réel x, on peut toujours calculer sa puissance entière x^n donc les fonctions polynomiales sont définies sur $\mathbb{R}$. Il est toujours possible de calculer l'image de x par $f(\cdot)$. On a donc $D_f = \mathbb{R}$

Exemple 22 : Le domaine de définition de la fonction polynômiale définie par, $f(x) = 10x^3 + 2x^2 - 5$ est $\mathbb{R}$. En effet, il est toujours possible de calculer $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. Par exemple, $f(1) = 7$, $f(-1) = -13$, $f(0) = -5$...

3 Fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{a_n \times x^n + a_{n-1} \times x^{n-1} + ... + a_1 \times x + a_0}{b_n \times x^n + b_{n-1} \times x^{n-1} + ... + b_1 \times x + b_0} = \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Une fonction rationnelle est le rapport de deux fonctions polynomiales. Par conséquent, on peut toujours calculer, pour n'importe quel réel x, le numérateur $P_1(x)$ et le dénominateur $P_2(x)$ qui sont des polynômes. Mais, on ne peut pas diviser par zéro. En d'autres termes la fonction rationnelle $f(x)$ n'est pas définie si $P_2(x) = 0$. Il faut s'assurer que le dénominateur soit non nul.
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, P_2(x) = 0\}$

Exemple 23 : La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie uniquement si x est différent de 0 c'est-à-dire que $f(0)$ n'existe pas ou l'antécédent $x = 0$ n'a pas d'image par f. Il faut donc éliminer cette valeur de l'ensemble de départ pour déterminer l'ensemble de définition. Ainsi, $D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Exemple 24 : Soit la fonction $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Cette fonction est définie si $cx + d \neq 0$ donc $x \neq \dfrac{-d}{c}$ (règle de la balance) d'où $D_f = \left]-\infty, \dfrac{-d}{c}\right[\cup \left]\dfrac{-d}{c}, +\infty\right[$.

Exemple 25 : Soit la fonction $f(x) = \dfrac{2x-4}{ax^2+bx+c}$. Elle est définie à la condition que $ax^2+bx+c \neq 0$. Le domaine de définition dépend du signe du discriminant de ce polynôme.

i) Si $\Delta < 0$ alors le polynôme n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

ii) Si $\Delta > 0$ alors le polynôme admet deux racines distinctes r_1 et r_2. Posons $r_1 < r_2$. Alors, $D_f =]-\infty; r_1[\cup]r_1; r_2[\cup]r_2; +\infty[$. Le domaine de définition est l'ensemble des réels privé des deux racines du polynôme qui se trouvent au dénominateur de la fonction.

Remarque : Ce domaine de définition indique que la courbe représentative de la fonction $f(x)$ ne traversera jamais les droites verticales d'équation $x = r_1$ et $x = r_2$ (cf. fiche sur la continuité (document sur l'EPI) et chapitre sur les limites et asymptotes).

iii) Si $\Delta = 0$ alors le polynôme admet une racine double r. Alors, $D_f =]-\infty; r[\cup]r; +\infty[$.

4 Fonction puissance entière

Rappels (S1) sur les règles de calcul des puissances.

1. Produit : $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2. Inverse : $\dfrac{1}{a^m} = a^{-m}$
3. Quotient : $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
4. Puissance de puissance : $(a^n)^m = a^{n\times m}$
5. Puissances identiques : $a^n \times b^n = (ab)^n$
6. Puissance nulle : $a^0 = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$

4.1 Fonction puissance entière positive (fonction polynomiale)

Les fonctions puissances entières positives sont un cas particulier de fonction polynomiale : $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ donc elles sont définies sur $\mathbb{R}$. On peut écrire $D_f =]-\infty; +\infty[$.

Exemple 26 : La fonction $f(x) = x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ quelle que soit la parité de n. Il est toujours possible de calculer le carré ou le cube d'un réel quelconque.

4.2 Fonction puissance entière négative

Les fonctions puissances entières négatives sont un cas particulier de fonction rationnelle : $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$ avec $P_1(x) = 1$ et $P_2(x) = x^n$. Elles sont définies quand $P_2(x) \neq 0 \Rightarrow x^n \neq 0$ donc $x \neq 0$. la valeur interdite est donc $x = 0$ d'où le domaine de définition : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R}^*$.

Exemple 27 : La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ n'est pas définie quand $x = 0$ car $0^n = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

5 Fonction valeur absolue

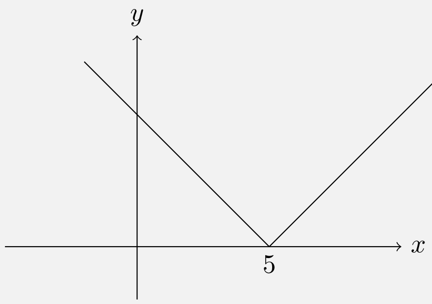
La fonction valeur absolue, $f(x) = |x|$ est ainsi définie :

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; +\infty[\\ -x, & x \in=]-\infty; 0] \end{cases}$$

Propriété : $|x| \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Exemple 28 : Calcul des images de la fonction $f(x) = |x|$.
$f(4) = |4| = 4$
$f(-4) = |-4| = -(-4) = 4$

Exemple 29 : Exprimer la fonction $f(x) = |x-5|$ sans les valeurs absolues.
Quand $x > 5$, alors $|x-5| = (x-5) = x-5$.
Quand $x < 5$, alors $|x-5| = -(x-5) = -x+5$.
Sa représentation graphique est composée de deux demi-droites.



6 Fonction racine carrée

6.1 Définition et propriétés des racines carrées

Par définition, la racine carrée d'un nombre $a \geq 0$ est le **nombre positif** $b \geq 0$ tel que $b^2 = a$. On le note : $b = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 28 : $\sqrt{16} = 4$ car $4^2 = 16$. Or, $(-4)^2 = 16$. Par définition, on suppose que la racine carrée est toujours positive. Par conséquent, on ne considère que 4 comme racine carrée de 16 même si $(-4)^2 = 16$
En revanche, $\sqrt{-16}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$ car le produit d'un nombre réel par lui-même est toujours positif : $x \times x = x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Enfin, $-\sqrt{16} = -\sqrt{4^2} = -4$.

Propriétés de la racine carrée.

1. $\forall x \geq 0,\ \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$: $\boxed{\left(\sqrt{4,5}\right)^2 = 4,5}$
2. $\sqrt{x^2} = x$, si $x \geq 0$ et $\sqrt{x^2} = -x$, si $x < 0$. On résume ces deux cas en écrivant : $\sqrt{x^2} = |x|$.
$\boxed{\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ et } \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2}$
3. $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$: $\boxed{\sqrt{5 \times 4} = \sqrt{5} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{5}}$
4. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ avec $y \neq 0$: $\boxed{\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{8}{6}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}}}$
5. Un **carré parfait** est le carré d'un entier : $\boxed{1^2 = 1\,;\ 2^2 = 4\,;\, 3^2 = 9...}$
On peut donc calculer facilement la racine carrée d'un carré parfait :
$\boxed{\sqrt{1} = 1\,;\ \sqrt{4} = 2\,;\ \sqrt{9} = 3\,;\ \sqrt{16} = 4\,;\ \sqrt{25} = 5\,;\ \sqrt{36} = 6\,;\ \sqrt{49} = 7\,;\ \sqrt{64} = 8\,;\ \sqrt{81} = 9\,;}$
$\boxed{\sqrt{100} = 10\,;\ \sqrt{121} = 11\,;\ \sqrt{144} = 12.}$

6.2 Domaine de définition

La fonction racine carrée, $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, est définie uniquement si $x \geq 0$. Le réel 0 appartient au domaine de définition car on peut calculer $\sqrt{0} = 0$. On a donc $D_f = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

7 Fonction racine n-ième

La racine n-ième de x est le réel y tel que $y^n = x$. On la note $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Le domaine de définition de la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ dépend de la parité de n. D'après les propriétés sur les puissances, on peut écrire $y = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow y^n = x$. Donc...

1. ...si n est pair alors y^n est toujours positif ou nul. Par conséquent x doit être positif ou nul d'où $D_f = [0; +\infty[$.
2. ...si n est impair alors y^n est positif ou négatif. Par conséquent x peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}$ d'où $D_f =]-\infty; +\infty[$.

Exemple 29 : La fonction racine cubique est définie par $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Ainsi, la racine cubique d'un nombre x est le nombre y tel que $y^3 = x$. On le note : $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Cette racine cubique peut être négative : $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $-3^3 = -27$ par conséquent son domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}$ ou $D_f =]-\infty; +\infty[$.

Exemple 30 : La fonction racine quatrième est définie par $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Ainsi, la racine quatrième d'un nombre x est le nombre y tel que $y^4 = x$. On le note : $y = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$. Exemple : $\sqrt[4]{16} = 2$ car $2^4 = 16$. Une racine quatrième est toujours positive car la puissance est paire : $y^4 = (-y)^4$ par conséquent son domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}^+$ ou $D_f = [0; +\infty[$.

8 Fonctions composées

8.1 Définition

Le principe d'une fonction composée est que l'image d'une première fonction sera l'antécédent d'une seconde fonction.

$$x \longrightarrow y = f(x) \text{ et } y \longrightarrow z = g(y) = g(f(x))$$

On écrit dans ce cas : $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ c'est-à-dire la **fonction composée de f par g**.
La **fonction composée de g par f** est la fonction notée $f \circ g$ définie par $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Exemple 31 : Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = 5x - 4$ alors $g \circ f(x) = g(f(x)) = 5 \times f(x) - 4 = 5x^2 - 4$ et $f \circ g(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (5x - 4)^2$. Donc, $g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$.

Exemple 32 : $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 + 4x$ alors $g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 4 \times f(x) = x + 4\sqrt{x}$ et $f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 + 4x}$. Donc, $g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$.

Les fonctions composées suivantes seront étudiées ce semestre.

1. Fonction puissance entière positive : $f(x) = (u(x))^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Fonction puissance entière négative : $f(x) = (u(x))^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ qui s'écrit aussi $f(x) = \dfrac{1}{(u(x))^n}$.
3. Fonction puissance rationnelle : $f(x) = \sqrt{u(x)} = u(x)^{\frac{1}{2}}$.

   Remarque : Les fonctions composées se ramènent à l'étude de $f(x) = (u(x))^n$ avec $n \in \mathbb{R}$.

8.2 Quel est le domaine de définition des fonctions composées ?

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur les ensembles de définitions : D_f et D_g. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $h(x) = g \circ f(x)$ composée de la fonction f suivie de la fonction g ?

Afin que $g \circ f$ soit définie, il faut tout d'abord que f soit définie, donc il est nécessaire que $x \in D_f$. En effet, c'est la première fonction que l'on utilise dans la composée $g \circ f$. Puis il faut que $g(f(x))$ existe donc il faut $f(x) \in D_g$.

Exemple 33 : Soit les fonctions définies par $f(x) = (u(x))^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Ces fonctions sont définies dès que la fonction $u(x)$ est définie donc $D_f = D_u$.
$f(x) = h \circ u(x)$ avec $h(x) = (x)^n$ et $u(x) = u(x)$. On constate que $D_h = \mathbb{R}$ donc $D_f = D_u$.

Exemple 34 : Soit les fonctions $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$ et $g(x) = x^3 - 27$ avec $D_h = \mathbb{R}^*$ et $D_g = \mathbb{R}$.

i) Soit $f(x) = g \circ h(x)$, il vient $f(x) = g\left[h(x)\right] = (h(x))^3 - 27 = \dfrac{1}{x^9} - 27$.

$$\begin{array}{llll} x \in D_f & \text{si } x \in D_h & \text{et} & h(x) \in D_g \\ & \text{si } x \in \mathbb{R}^* & \text{et} & \dfrac{1}{x^3} \in \mathbb{R} \end{array} \quad \text{donc } D_f = \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

ii) Soit $f(x) = h \circ g(x)$, il vient $f(x) = h\left[g(x)\right] = \dfrac{1}{(g(x))^3} = \dfrac{1}{(x^3 - 27)^3}$.

$$\begin{array}{llll} x \in D_f & \text{si } x \in D_g & \text{et} & g(x) \in D_h \\ & \text{si } x \in \mathbb{R} & \text{et} & x^3 - 27 \neq 0 \\ & \text{si } x \in \mathbb{R} & \text{et} & x^3 \neq 27 \\ & \text{si } x \in \mathbb{R} & \text{et} & x \neq (27)^{\frac{1}{3}} \\ & \text{si } x \in \mathbb{R} & \text{et} & x \neq 3 \end{array} \quad \text{donc } D_f =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$$

Exemple 35 : Soit les fonctions $g(x) = \sqrt{x}$ et $h\left(x\right) = x^2 - 4x + 3$ avec $D_g = \mathbb{R}^+$ et $D_h = \mathbb{R}$

i) Soit $f(x) = g \circ h(x)$, il vient $f(x) = g\left[h(x)\right] = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

$$\begin{array}{llll} x \in D_f & \text{si } x \in D_h & \text{et} & h(x) \in D_g \\ & \text{si } x \in \mathbb{R} & \text{et} & x^2 - 4x + 3 \in \mathbb{R}^+ \\ & \text{si } x \in \mathbb{R} & \text{et} & x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{array}$$

On calcule le discriminant de $P(x) = x^2 - 4x + 3$: $\Delta = 4$. Les racines sont donc, $x' = 1$ et $x'' = 3$. On applique la règle ou on fait un tableau de signes après avoir factorisé le trinôme. Enfin, on trouve : $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$.

$$\begin{array}{llll} x \in D_f & \text{si } x \in D_h & \text{et} & h(x) \in D_g \\ & \text{si } x \in \mathbb{R} & \text{et} & x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[\end{array} \quad \text{donc } D_f =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$$

Remarque : Il y a donc un "trou" (une discontinuité) dans l'ensemble des réels de départ : $\forall x \in]1; 3[$, la fonction n'est pas définie pour les nombres réels de cet intervalle. Essayez avec $x = 2$!

Soit ii) $f(x) = h \circ g(x)$, il vient $f(x) = h\left[g(x)\right] = \sqrt{x}^2 - 4\sqrt{x} + 3 = x - 4\sqrt{x} + 3$.

$$\begin{array}{llll} x \in D_f & \text{si } x \in D_g & \text{et} & g(x) \in D_h \\ & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ & \text{et} & \sqrt{x} \in \mathbb{R} \end{array} \quad \text{donc } D_f = [0; +\infty[$$

9 Opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions de domaine respectif D_f et D_g alors

1. La somme de f et g est définie par $h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
2. La différence de f et g est définie par $h(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$.
3. Le produit de f et g est définie par $h(x) = (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.

   Quand une fonction $h(x)$ est définie comme la somme, la différence ou le produit de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ alors pour pouvoir calculer $h(x)$ il faut pouvoir calculer $f(x)$ ET $g(x)$. Le réel x doit donc appartenir à la fois à D_f et D_g donc $D_h = D_f \cap D_g$.

4. Le quotient de f et g est définie par $h(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$,

   Quand une fonction $h(x)$ est définie par le rapport de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ alors pour pouvoir calculer $h(x)$ il faut pouvoir calculer $f(x)$ ET $g(x)$. Il faut de plus que $g(x)$ soit différent de 0 car on ne peut pas diviser par 0. Donc, $D_h = D_f \cap D_g \setminus \{x,\ g(x) = 0\}$.

Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$.

Exemple 36 : La somme des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ donne la fonction $h(x) = (f+g)(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x-4}$ où

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & D_f = [0; +\infty[\\ g(x) = \dfrac{1}{x-4} & D_g =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[\end{cases}$$

$D_h = D_f \cap D_g$ donc $D_h = [0; 4[\cup]4; +\infty[$.

Exemple 37 : La soustraction des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ donne la fonction $k(x) = (f-g)(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x-4}$. Et $D_k = [0; 4[\cup]4; +\infty[$.

Exemple 38 : Le produit des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ donne la fonction $l(x) = (f \times g)(x) = \sqrt{x} \times \dfrac{1}{x-4}$. Et $D_l = [0; 4[\cup]4; +\infty[$.

Exemple 39 : Le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ donne la fonction $m(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-4}$ où

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & D_f = [0; +\infty[\\ g(x) = x^2 - 4 & D_g =]-\infty; +\infty[\end{cases}$$

Mais $g(x) \neq 0$ donc $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \ et \ x \neq 2$. Donc $D_m = [0; 2[\cup]2; +\infty[$.

Exemple 40 : Le quotient $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ donne la fonction $w(x) = \left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}}$ où

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & D_f = [0; +\infty[\\ g(x) = x^2 - 4 & D_g =]-\infty; +\infty[\end{cases}$$

Mais $f(x) \neq 0$ donc $\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$. Donc $D_w =]0; +\infty[$.