Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2022-2023
Algèbre Linéaire 1

Epreuve de première session

Durée : 2h.
Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
Explicitez votre raisonnement, même s'il n'a pas abouti.
Montrez-moi ce que vous savez faire !

Exercice 1 (/9 points)) On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 3\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on introduit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$

$$G_\alpha = \text{Vect}(u_1, u_2, v_\alpha), \quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + y + z = 0, 3y + 2z = 0\}$$

1. **[/1.5 pt]** Déterminer une base et la dimension de H.
2. **[/1.5 pt]** Montrer que $\mathscr{F}_\alpha = \{u_1, u_2, v_\alpha\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $\alpha \neq 1$.
3. **[/1.5 pt]** $\boxed{\text{Pour } \alpha \neq 1}$, donner une base et la dimension de G_α.
4. **[/2 pts]** $\boxed{\text{Pour } \alpha = 1}$, donner une base et la dimension de G_1. Déterminer une équation de G_1.
5. **[/1.5 pt]** $\boxed{\text{Pour } \alpha = 1}$ Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus G_1$.
6. **[/1 pt] Question de cours :** Qu'appelle-t-on *"base canonique de* $\mathbb{R}^3$*"* ?
   $\boxed{\text{Pour } \alpha = 0}$, donner la *matrice de passage* de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathscr{F}_0$.

Exercice 2 (/11 points)) On considère, pour $\beta \in \mathbb{R}$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

1. **[/1 pt] Pour** $\beta = 0$: montrer que A_0 est inversible et déterminer son inverse.
2. **[/2 pts] Pour** $\beta = 1$: Calculer A_1^2. Montrer que pour tout $k \geqslant 1, A_1^k = (-2)^{k-1} A_1$.

   Pour $\beta \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$f_\beta : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto A_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-x + y + z, -2x - 4y - 2z, 3x + 3y + \beta z) \in \mathbb{R}^3$$

3. **[/1 pt]** Montrer que, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, f_β est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
4. **[/2 pts]** $\boxed{\text{Pour } \beta \neq 1}$, déterminer $\text{Ker}\, f_\beta$, $\text{Im}\, f_\beta$ et le rang de f_β.
5. **[/2 pts]** $\boxed{\text{Pour } \beta = 1}$, montrer que $\text{Ker}\, f_\beta = H$ (de l'exercice précédent). Donner une base de $\text{Im}\, f_\beta$ et le rang de f_β.
6. **[/1 pt]** Déduire des deux questions précédentes les valeurs de β pour lesquelles f_β est un isomorphisme.
7. **[/1 pt]** $\boxed{\text{Pour } \beta = 1}$, donner l'expression de $f_1 \circ f_1$ et $\underbrace{f_1 \circ \ldots \circ f_1}_{k \text{ fois}}$.
8. **[/1 pt] Question de cours :** Justifier que A_β est la matrice de f_β dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Expliquer par quelles étapes passer pour obtenir la matrice de f_β dans la base $\mathscr{F}_0$ de l'exercice précédent.